Über die hypergeometrische Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit zwei endlichen singulären Punkten

---

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der Hohen Philosophischen Fakultät II. Sektion
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt am 19. November 1930

von

Ernst Winkler
aus Weißenbrunn

München 1931

Druck der Salesianischen Offizin.

Über die hypergeometrische Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit zwei endlichen singulären Punkten

---

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der Hohen Philosophischen Fakultät II. Sektion
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt am 19. November 1930

von

Ernst Winkler
aus Weißenbrunn

München 1931

Druck der Salesianischen Offizin.

1. Berichterstatter:
Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. Oskar Perron.

2. Berichterstatter:
Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. Heinrich Tietze.

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Februar 1931.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhaltsübersicht.

§ 1. Einleitung . . . . . Seite 5

Erstes Kapitel: Darstellung der Lösungen durch bestimmte Integrale.

§ 2. Allgemeine Eigenschaften der hypergeometrischen Differentialgleichung und ihrer Integrale . 11
§ 3. Rekursionsdarstellung der partikulären Integrale in Form bestimmter Integrale 13
§ 4. Rekursive Definition der Hauptintegrale 16
§ 5. Ergänzende Bemerkungen und Folgerungen 21

Zweites Kapitel: Reihenentwicklungen der Hauptintegrale.

§ 6. Reihenentwicklungen der Hauptintegrale der ersten Gruppe 23
§ 7. Die Hauptintegrale der zweiten Gruppe 29
§ 8. Die Hauptintegrale der dritten Gruppe 34

Drittes Kapitel: Übergangssubstitutionen zwischen den Fundamentalsystemen.

§ 9. Übergangssubstitutionen zwischen den Fundamentalsystemen um 0 und ∞ 36
§ 10. Übergangssubstitutionen zwischen den Fundamentalsystemen um 1 einerseits, 0 und ∞ anderseits 43

Viertes Kapitel: Besonderheiten.

§ 11. Ausgezeichnete Werte der Parameter 46
§ 12. Logarithmenbehaftete Ersatzintegrale und ihre analytischen Fortsetzungen 51
§ 13. Die Gauß'sche hypergeometrische Differentialgleichung zweiter Ordnung 57
Literaturverzeichnis 62

§ 1. Einleitung.

In der Literatur treten zwei verschiedene Verallgemeinerungen der Gauß'schen hypergeometrischen Differentialgleichung zweiter Ordnung auf. Beide sind lineare Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung der Fuchs'schen Klasse und werden von Pochhammer als „hypergeometrische Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit n im Endlichen gelegenen singulären Punkten“[1] und „hypergeometrische Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit zwei endlichen singulären Punkten“ unterschieden. Bezüglich der ersten vergleiche man vor allem Pochhammers grundlegende Arbeit: „Über hypergeometrische Funktionen n^{ter} Ordnung“ (Journ. f. Math. 71, p. 316). Die zweite ist Gegenstand vorliegender Arbeit und soll „hypergeometrische Differentialgleichung“ schlechthin genannt werden.

Die im Namen erwähnten zwei endlichen singulären Punkte pflegt man nach $x=0$ und $x=1$ zu verlegen. Die zu den singulären Punkten $x=0$ und $x=\infty$ gehörigen kanonischen Fundamentalsysteme[2] der Integrale lassen sich mit Hilfe von Reihenentwicklungen der folgenden Form darstellen:

$$\textbf{(1)}\qquad F_n(\xi) = F\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \\ \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n\end{matrix}\middle|\,\xi\right) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{[\alpha_1]_\lambda\,[\alpha_2]_\lambda \ldots [\alpha_n]_\lambda}{[\beta_1]_\lambda\,[\beta_2]_\lambda \ldots [\beta_n]_\lambda}\,\xi^\lambda \quad \left[\xi = x \text{ bzw. } = \frac{1}{x}\right]$$

wobei zur Abkürzung für ganzzahliges $\lambda \geqq 0$ das übliche Symbol benützt wird:

$$\textbf{(2)}\qquad [\alpha]_\lambda = \frac{\Gamma(\alpha+\lambda)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha\,(\alpha+1)\ldots(\alpha+\lambda-1).$$

Die für $|\xi|<1$ konvergente Reihe (1) wird als „hypergeometrische Reihe n^{ter} Ordnung“ bezeichnet. Natürlich ist vorauszusetzen, daß keiner der im Nenner stehenden Parameter β. Null oder eine ganze negative Zahl sei; für gewöhnlich hat einer derselben den speziellen Wert 1_i Die durch die Reihe (1) definierte Funktion einschließlich ihrer (in der von $\xi=1$ bis $\xi=\infty$ aufgeschnittenen ξ-Ebene eindeutigen) analytischen Fortsetzung heißt „hypergeometrische Funktion n^{ter} Ordnung“ und soll mit dem gleichen Funktionszeichen bezeichnet werden.

Es folge zunächst ein kurzer Überblick über die geschichtliche Entwicklung der Theorie. Dabei mögen die Bezeichnungen der einzelnen Autoren, wo nötig, in geringfügiger Weise abgeändert werden um sie mit der hier benutzten einheitlichen Schreibweise in Einklang zu bringen. Die mit „L.“ und einer Ziffer gekennzeichneten Literaturangaben verweisen auf das am Schlusse beigefügte Literaturverzeichnis (S. 62).

Hypergeometrische *Reihen* höherer Ordnung treten zum ersten Male bei Clausen (1828; L. 1) auf, anläßlich der Frage, wann das Quadrat von

$$F\left(\begin{matrix}\alpha, \beta \\ 1, \gamma\end{matrix}\middle|\,x\right) \text{ die Form } F\left(\begin{matrix}\alpha', \beta', \delta' \\ 1, \gamma', \varepsilon'\end{matrix}\middle|\,x\right) \text{ hat.}$$

Die hypergeometrische *Differentialgleichung* n^{ter} Ordnung wurde zuerst von Thomä (1870; L. 2) aufgestellt und zwar in der folgenden, etwas ungewohnten, aber sehr vorteilhaften Form:

$$\textbf{(3)}\qquad \sum_{\nu=0}^{n} \left(B_{n-\nu} - A_{n-\nu}\,x\right) \frac{d^\nu y}{(d \ln x)^\nu} = 0 \quad [A_0 = B_0 = 1];$$

[1] Von Schlesinger „Tissot—Pochhammersche Differentialgleichung“ genannt; Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. 2, Nr. 243. ff.

[2] Vgl. Schlesinger, l. c. Bd. 1, Nr. 32.

ausführlich geschrieben:

$$(1-x)\frac{d^n y}{(d\ln x)^n} + (B_1 - A_1 x)\frac{d^{n-1} y}{(d\ln x)^{n-1}} + \ldots + (B_n - A_n x)\,y = 0.$$

Da $\frac{dy}{d\ln x} = x\frac{dy}{dx}$; $\frac{d^2 y}{(d\ln x)^2} = x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2 y}{dx^2}$ etc.; allgemein: $\frac{d^\nu y}{(d\ln x)^\nu}$ gleich einer Linearkombination von $x\frac{dy}{dx}, x^2\frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots x^\nu\frac{d^\nu y}{dx^\nu}$ ist, so läßt sich (3) in die Form überführen:

$$\textbf{(4)} \qquad (1-x)x^n\frac{d^n y}{dx^n} + (b_1 - a_1 x)x^{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + (b_n - a_n x)\,y = 0.$$

Wie man sieht, gehört die Differentialgleichung zur Fuchs'schen Klasse und besitzt die drei singulären Punkte $x = 0, 1, \infty$, wobei speziell $x = 1$ ein „einfacher singulärer Punkt" ist,[1] so daß also stets $n - 1$ linear unabhängige, um $x = 1$ reguläre Integrale existieren.

Der Nutzen der Schreibweise (3) hat seinen Grund in der einfachen Gleichung: $\frac{d^\nu(x^r)}{[d\ln x]^\nu} = r^\nu x^r$. Setzt man also in (3) zum Zweck der Reihenintegration die Reihe ein: $y = x^r \sum_{\lambda=0}^{\infty} d_\lambda x^\lambda$, daher: $\frac{d^\nu y}{(d\ln x)^\nu} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (r+\lambda)^\nu d_\lambda x^{r+\lambda}$, so resultiert als Bedingung für das Verschwinden des Koeffizienten von $x^{r+\lambda}$ die einfache Gleichung:

$$\sum_{\nu=0}^{n} [B_{n-\nu}(r+\lambda)^\nu d_\lambda - A_{n-\nu}(r+\lambda-1)^\nu d_{\lambda-1}] = 0.$$

Speziell für $\lambda = 0$ ($d_0 \neq 0$, $d_{-1} = 0$) folgt die determinierende Gleichung: $\sum_{\nu=0}^{n} B_{n-\nu} r^\nu = 0$. Die n Wurzeln dieser Gleichung bezeichnet Thomä mit $r_i = 1 - \beta_i$ ($i = 1, 2, \ldots n$); desgleichen die n Wurzeln der Gleichung: $\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu} r^\nu = 0$ mit $r_i = -\alpha_i$ ($i = 1, 2, \ldots n$). Demnach nimmt die eben aufgestellte Rekursionsformel für die Koeffizienten d_λ die einfache Gestalt an: $\prod_{\rho=1}^{n} (r + \beta_\rho + \lambda - 1) \cdot d_\lambda = \prod_{\rho=1}^{n} (r + \alpha_\rho + \lambda - 1) \cdot d_{\lambda-1}$.

Hieraus ergeben sich bei der Wahl $d_0 = 1$ und mit Benützung des in (1) definierten Funktionszeichens die folgenden Reihenentwicklungen für die Integrale des zu 0 gehörigen kanonischen Fundamentalsystems:

$$\textbf{(5)} \qquad x^r F\left(\begin{matrix}\alpha_1 + r, \alpha_2 + r, \ldots \alpha_n + r \\ \beta_1 + r, \beta_2 + r, \ldots \beta_n + r\end{matrix}\middle| x\right); \quad r = 1-\beta_1, 1-\beta_2, \ldots 1-\beta_n.$$

Durch eine ganz analoge Rechnung findet Thomä für die Stelle $x = \infty$ die Reihenentwicklungen:

---

[1] Vgl. Pochhammer, Über einfache singuläre Punkte linearer Differentialgleichungen; J. f. Math. 73, p. 69.

(6) $$\left(\frac{1}{x}\right)^r F\left(\begin{matrix}1-\beta_1+r,\ 1-\beta_2+r,\ \ldots\ 1-\beta_n+r\\ 1-\alpha_1+r,\ 1-\alpha_2+r,\ \ldots\ 1-\alpha_n+r\end{matrix}\middle|\ \frac{1}{x}\right);\quad r=\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n.$$

Hiebei ist vorauszusetzen, daß keine der Differenzen $\beta_i-\beta_k$ und $\alpha_i-\alpha_k$ $(i, k=1, 2, .. n;\ i \neq k)$ ganzzahlig ist (Näheres vgl. §§ 11 und 12). Man beachte übrigens, daß in diesen Reihen stets eines der im Nenner stehenden Argumente den Wert 1 hat. Setzt man überdies, wie es in der Literatur vielfach üblich ist, speziell $\beta_n=1$, so wird ein Integral bei $x=0$ regulär und gleich der hypergeometrischen Funktion selbst. Diese Spezialisierung bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, da man die diesbezügliche Eigenschaft der Diff. gl. stets durch eine geeignete Transformation der abhängigen Veränderlichen herstellen kann. Anderseits aber bringt eine solche, die Symmetrie störende Spezialisierung keine Vereinfachung der Darstellung, weshalb in vorliegender Arbeit auf sie verzichtet werden soll.

Wegen der grundsätzlichen Bedeutung, welche die Parameter α_i, β_i für die hyperg. Diff. gl. haben, ist es vorteilhafter, von diesen statt von den Koeffizienten A_k, B_k der Diff. gl. (3) auszugehen und mithin zu definieren:

(I)
$A_k = k^{te}$ *symmetrische Grundfunktion der n Größen:* $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots -\alpha_n$;
$B_k =$ „ „ „ „ „ „ „ „ : $1-\beta_1, 1-\beta_2, \ldots 1-\beta_n$;
$A_0 = B_0 = 1.$

Damit sind auch die Koeffizienten a_k, b_k der Form (4) als kompliziertere symmetrische Funktionen der α_i bzw. der β_i definiert.

An dieser Stelle sei gleich bemerkt, daß das mehrdeutige partikuläre Integral des zu 1 gehörigen kanonischen Fundamentalsystems nach dem zitierten Aufsatz Pochhammers (Fußnote Seite 6) zum Exponenten b_1-a_1+n-1 gehört (falls dieser nicht ganzzahlig ist). Da nun der n^{te} Differentialquotient nach ln x die Form hat:

$$\frac{d^n y}{(d \ln x)^n} = x^n \frac{d^n y}{dx^n} + p_n x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots \left[\text{man findet } p_n = \tbinom{n}{2}\right],$$

so ist: $a_1 = A_1 + p_n$, $b_1 = B_1 + p_n$; daher:

(7a) $$b_1 - a_1 + n - 1 = B_1 - A_1 + n - 1 = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - 1) - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i) + n - 1 = \sigma_n - 1$$

wo zur Abkürzung gesetzt wurde:

(7) $$\sigma_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n.$$

Schließlich findet Thomä die zur bekannten Integraldarstellung der hypergeometrischen Funktion zweiter Ordnung analoge Darstellung:

(8) $$F\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\\ 1, \beta_2, \beta_3\end{matrix}\middle|\ x\right) = \frac{\Gamma(\beta_3)}{\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\beta_3-\alpha_3)} \int_0^1 u^{\alpha_3-1} (1-u)^{\beta_3-\alpha_3-1} F\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2\\ 1, \beta_2\end{matrix}\middle|\ xu\right) du,$$

die sich leicht mittels der Reihenentwicklung (1) beweisen läßt, und kann demnach die zu 0 und ∞ gehörigen partikulären Integrale (5) und (6) für $n=3$ durch bestimmte Integrale definieren.

Einen systematisch interessanteren Weg schlägt Goursat (1883; L. 4) ein. Er definiert die hypergeometrische Funktion n^{ter} Ordnung $F_n(x)$ durch allgemeine Forderungen und findet hieraus die hypergeometrische Differentialgleichung in der Form (4) — mit dem

Unterschied, daß $b_n = 0$ wegen der Spezialisierung $\beta_n = 1$ ist. Die Koeffizienten a_k, b_k sind dabei als symmetrische Funktionen der Parameter α_i, β_i durch jene Gleichungen definiert, welche sich beim Vergleich der Koeffizienten gleicher Potenzen in r aus folgenden beiden Relationen ergeben:

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu [r]_{n-\nu} = (r+\alpha_1)(r+\alpha_2)\dots(r+\alpha_n); \quad \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu [r]_{n-\nu} = r(r-1+\beta_1)\dots(r-1+\beta_{n-1}).$$

Auch Goursat erhält durch Reihenintegration die partikulären Integrale (5) und (6) sowie eine zu (8) analoge Darstellung dieser Integrale mittels $(n-1)$-facher bestimmter Integrale. Nebenbei sei erwähnt, daß er in diesem Zusammenhang die von Clausen (L. 1) aufgeworfene Frage in verallgemeinerter Fassung und für allgemeines n vollständig beantwortet.

Gerade umgekehrt wie Goursat verfährt Pochhammer in seiner diesbezüglichen, für die ganze Theorie grundlegenden Arbeit (1888; L. 5): Er definiert die hygerg. Diff. gl. n^{ter} Ordnung rekursiv aus jener der $(n-1)^{ten}$ Ordnung durch die Forderung, daß sich ihre Integrale $J_n(x)$ in folgender Form darstellen lassen:

(9) $$J_n(x) = C_n \int_g^h (t-x)^{-\alpha_n} t^{\alpha_n - \beta_{n-1}} \bar{J}_{n-1}(t)\, dt \qquad \text{[L. 5, p. 127, (83)]}$$

(Spezialisierung: $\beta_n = 1$). Dabei können als Integralgrenzen g, h irgend zwei der Werte 0, 1, ∞, x auftreten und die Funktion $\bar{J}_{n-1}(x)$ genügt einer analog gebauten Differentialgleichung $(n-1)^{ter}$ Ordnung, deren Parameter $\bar{\alpha}_i$ $(i = 1, \dots n-1)$, $\bar{\beta}_i$ $(i = 1, \dots n-2)$ sich als Linearkombinationen der Parameter α_i $(i = 1, \dots n)$, β_i $(i = 1, \dots n-1)$ der ursprünglichen Differentialgleichung ausdrücken:

(9a) $$\bar{\alpha}_i = \alpha_i - \beta_{n-1} + 1; \quad \bar{\beta}_i = \beta_i - \beta_{n-1} + 1 \qquad \text{[L. 5, p. 128, (86)]}.$$

Pochhammer erhält hieraus gleichfalls die hyperg. Diff. gl. in der Form (4) mit der Spezialisierung $\beta_n = 1$, also $b_n = 0$; dabei sind die Koeffizienten a_k, b_k in wesentlich komplizierterer Weise als bei Goursat als symmetrische Funktionen der Parameter α_i, β_i definiert (siehe L. 5, § 9, p. 125).

Die Rekursionsformel (9) liefert bis auf einen konstanten Faktor die Darstellung der partikulären Integrale (einschließlich der zu $x = 1$ gehörigen!) in der Form $(n-1)$-facher bestimmter Integrale bei geeigneter Wahl der Integralgrenzen (L. 5, §§12, 13; p. 145 ff.). Aus dieser Darstellung berechnet Pochhammer für je $(n-1)$ zu 0 und zu ∞ gehörige (linear unabhängige) Integrale die Reihenentwicklungen nach Potenzen von x bzw. $\frac{1}{x}$ in der Form (5) und (6).[1] In den übrigen Fällen bleibt mangels einer Reihenentwicklung auch die Frage offen, wie der konstante Faktor bei der Integraldarstellung [C_n in (9)] zu wählen ist, damit der erste Koeffizient in der zugehörigen Reihenentwicklung den Wert 1 oder einen anderen vorgegebenen Wert besitzt.

Schafheitlin (1888; L. 6) gestaltet die ziemlich umständliche Herleitung Pochhammers etwas kürzer und eleganter und vergleicht dessen Ergebnisse mit denen Goursat's.

---

[1] Nämlich die bei $x = 0$ bzw. $x = \infty$ zu den Exponenten $r = 1-\beta_1, \dots 1-\beta_{n-1}$ bzw. $r = \alpha_1, \dots \alpha_{n-1}$ gehörigen Integrale; das n^{te} zu 0 bzw. ∞ gehörige Integral, das von P. gleichfalls durch eine Integraldarstellung definiert wird, kann sich von der in (5) bzw. (6) angegebenen Reihe mit $r = 1-\beta_n$ bzw. $r = \alpha_n$ natürlich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. [Vgl. im folgenden (20) und (23) bezw. (21) und (24).]

Auch zu einigen der zahlreichen und wertvollen Funktionaleigenschaften der Gauß'schen hypergeometrischen Funktion wurden für allgemeines n Analogieen aufgefunden. Unter ihnen spielen die Relationen zwischen benachbarten Funktionen (d. h. solchen, in denen sich einzelne Parameterwerte um ganze Zahlen unterscheiden) eine hervorragende Rolle. Thomä beweist in der bereits zitierten Arbeit (L. 2), daß zwischen je $n+1$ hypergeometrischen Funktionen n^{ter} Ordnung, in denen ein einzelner Parameter α_i oder β_i durch die Werte $\alpha_i+\nu$ bzw. $\beta_i+\nu$ mit $\nu=0,1,\ldots n$ ersetzt ist, eine lineare homogene Relation besteht, gibt eine allgemeine Methode zu ihrer Berechnung und berechnet selbst zahlreiche Beispiele. In einem weiteren Aufsatz (L. 3) findet er dieselben Relationen auf völlig anderem Wege für den speziellen Wert $x=1$. Auch Goursat (L. 4, p. 281) erwähnt eine andersartige Relation zwischen benachbarten Funktionen für $n=3$.

Endlich sind noch die Übergangssubstitutionen zwischen den zu den 3 singulären Punkten gehörigen Fundamentalsystemen von Interesse. Thomä (L. 2) berechnet sie im Falle $n=3$ zwischen den beiden zu 0 und ∞ gehörigen Fundamentalsystemen mit Hilfe der Integraldarstellung (8) und gibt ohne Beweis deren Verallgemeinerung für beliebiges n an. Rajewski (L. 8) leitet die gleichen Übergangssubstitutionen für allgemeines n aus gewissen Relationen zwischen abbrechenden hypergeometrischen Reihen her, indem er von der nachträglich wieder aufzuhebenden Voraussetzung ausgeht, daß $\alpha_i+1-\beta_k$ eine ganze negative Zahl sei [vgl. im folgenden (75)].

Die im Literaturverzeichnis noch genannte Arbeit Mellin's (L. 7) wird in § 8 erwähnt werden.

Die vorliegende Arbeit beabsichtigt nun die Ergebnisse Goursat's und Pochhammers auf einem neuen und kürzeren Wege herzuleiten und soweit zu vervollständigen, daß die Eigenschaften der Integralfunktionen der hypergeometrischen Diff. gl. n^{ter} Ordnung in gleichem Umfang wie für den Spezialfall $n=2$ der Gauß'schen Diff. gl. als bekannt gelten können. Dabei wird sich herausstellen, daß die bisher bekannten Ergebnisse mehr die Analogie, die neuen Ergebnisse dagegen vorwiegend die Unterschiede des allgemeinen Falles gegenüber diesem Spezialfall hervorheben.

Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet die hyperg. Diff. gl. n^{ter} Ordnung in der übersichtlichen, von Thomä angegebenen Form (3). Wie für die Reihenintegration, so bewährt sie sich auch für die Herleitung der rekursiven Integraldarstellungen der partikulären Integrale als äußerst zweckmäßig. Die Integraldarstellung selbst wird sich in einer Form ergeben [siehe im folgenden (15) und (19)], welche der von Pochhammer angegebenen (9) ähnlich ist, vor ihr aber den praktischen Vorzug hat, daß im Integranden an Stelle von $\overline{J}_{n-1}(t)$ ein Integral $J_{n-1}(t)$ der *ebenso* gebauten hyperg. Diff. gl. $(n-1)^{ter}$ Ordnung auftritt; d. h. an die Stelle der linearen Transformationen (9a) treten die Identitäten $\overline{\alpha}_i=\alpha_i$, $\overline{\beta}_i=\beta_i$ für $i=1,2\ldots n-1$. Bei $(n-1)$-maliger Anwendung dieser Rekursionsdarstellung mit geeigneter Transformation der Integrationsvariabeln würden sich die gleichen $(n-1)$-fachen bestimmten Integrale für die partikulären Lösungen ergeben, wie Pochhammer sie berechnet hat. Doch soll diese einigermaßen schwerfällige Darstellung gerade vermieden und in allen Stücken durch die bequeme Methode der vollständigen Induktion von $J_{n-1}(x)$ auf $J_n(x)$ ersetzt werden.

Hiernach können zunächst die von Pochhammer berechneten Reihenentwicklungen (5) und (6) bestätigt sowie auf das n^{te} zu 0 bzw. ∞ gehörige Integral ausgedehnt werden.[1] Ferner sollen — in Analogie zur hyperg. Diff. gl. 2ter Ordnung — diese Integrale auch nach Potenzen von $\frac{x}{x-1}$ bzw. $\frac{1}{1-x}$ entwickelt werden; schließlich die zu 1 gehörigen Integrale nach Potenzen von $1-x$ und $\frac{x-1}{x}$. Dabei nehmen die $n-1$ am Einheitspunkt regulären (durch die rekursive Integraldarstellung definierten) Integrale insofern eine Sonderstellung ein, als sich die Koeffizienten ihrer Reihenentwicklungen nicht durch analoge geschlossene Ausdrücke wie in den übrigen Fällen darstellen lassen.

Nach der schon von Thomä in einem Spezialfall angewandten Methode des Grenzüberganges werden ferner die Koeffizienten aller Übergangssubstitutionen zwischen den zu den 3 singulären Punkten gehörigen Fundamentalsystemen berechnet. Diese Koeffizienten lassen sich bei geeigneter Normierung der Intergrale (siehe unten!) sämtlich aus Sinusfunktionen von Linearformen der Parameter aufbauen. Für die Substitution zwischen 0 und ∞ bestätigen sich die Ergebnisse von Thomä (L. 2) und Rajewski (L. 8).

Endlich sollen noch die in der Literatur bisher ausgeschlossenen Fälle logarithmenbehafteter Reihenentwicklungen einschließlich ihrer analytischen Fortsetzungen untersucht werden.

Formal weicht die folgende Darstellung von der in der Literatur üblichen in einem wesentlichen Punkt ab: Die partikulären Integrale werden nicht so normiert, daß der erste Koeffizient in der zugehörigen Reihenentwicklung den Wert 1 hat. Sie unterscheiden sich also von den üblicherweise normierten um einen zweckmäßig gewählten, von den Parametern α_i, β_i abhängigen Faktor, den schon Thomä (L. 2) im Fall $n=3$ für die zu 0 und ∞ gehörigen Integrale vorgeschlagen hat.[2] Durch diese Normierung erreicht man in erster Linie eine einfache Form der Übergangssubstitutionen; auch sonst bringt sie mancherlei Vorteile, namentlich für die Fälle logarithmenbehafteter Reihen. Die Rückübersetzung aller Formeln in die alte Darstellung bietet keinerlei Schwierigkeiten.

---

[1] Vgl. Fußnote Seite 8!

[2] Für $n=2$ vgl. auch Klein, Vorlesung über die hypergeometrische Funktion, p. 190—192.

Erstes Kapitel.

Darstellung der Lösungen durch bestimmte Integrale.

§ 2. *Allgemeine Eigenschaften der hypergeometrischen Differentialgleichung und ihrer Intregale.*

Von den in der Einleitung mitgeteilten Ergebnissen werden für die folgenden Untersuchungen vorausgesetzt: Die hypergeometrische Reihe $F_n(\xi)$ (1), die hypergeometrische Differentialgleichung in der von Thomä angegebenen Form (3) mit der Definition (I) ihrer Koeffizienten und das Verhalten ihrer Integrale in der Umgebung der 3 singulären Punkte $0, 1, \infty$ [vgl. (5), (6), (7)]. Mit Einführung drei neuer Funktionszeichen können demnach die kanonischen Fundamentalsysteme an diesen 3 Punkten folgendermaßen dargestellt werden:

(II)
Am Punkt $x = 0$: $x^{1-\beta_\nu}\,\Phi_{n\nu}(x)$, $(\nu = 1, 2, \ldots n)$
wo $\Phi_{n\nu}(x)$ *bei* $x = 0$ *regulär und* $\Phi_{n\nu}(0) \neq 0$ *ist;*
am Punkt $x = \infty$: $x^{-\alpha_\nu}\,\Psi_{n\nu}(x)$, $(\nu = 1, 2, \ldots n)$
wo $\Psi_{n\nu}(x)$ *bei* $x = \infty$ *regulär und* $\Psi_{n\nu}(\infty) \neq 0$ *ist;*
am Punkt $x = 1$: $(x-1)^{\sigma_n - 1}\,\Omega_{nn}(x)$,
wo $\Omega_{nn}(x)$ *bei* $x = 1$ *regulär und* $\Omega_{nn}(1) \neq 0$ *ist;*
ferner $n-1$ *linear unabhängige, bei* $x = 1$ *reguläre Integrale* $\Omega_{n\nu}(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots n-1)$.

Es soll für das Folgende vorausgesetzt werden, daß die n Parameter α_i sowie die n Parameter β_i keine ganzzahligen Differenzen (einschließlich Null) besitzen und daß σ_n keine ganze Zahl ist. Unter diesen Voraussetzungen sind die partikulären Integrale $x^{1-\beta_\nu}\,\Phi_{n\nu}(x)$, $x^{-\alpha_\nu}\Psi_{n\nu}(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ und $(x-1)^{\sigma_n - 1}\,\Omega_{nn}(x)$ bis auf einen konstanten Faktor bestimmt und mögen ebenso wie die noch näher zu bestimmenden Funktionen $\Omega_{n\nu}(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots n-1)$ künftig kurz die „Hauptintegrale" heißen. Die n zu einem singulären Punkt $0, \infty$ oder 1 gehörigen Hauptintegrale bilden unter den gemachten Voraussetzungen ein Fundamentalsystem.

Der noch unbestimmte konstante Faktor soll später geeignet gewählt werden. Speziell bei der üblichen Normierung erhält man die partikulären Integrale:

(10) $$x^{1-\beta_\nu}\,\frac{\Phi_{n\nu}(x)}{\Phi_{n\nu}(0)};\quad x^{-\alpha_\nu}\,\frac{\Psi_{n\nu}(x)}{\Psi_{n\nu}(\infty)};\quad (x-1)^{\sigma_n - 1}\,\frac{\Omega_{nn}(x)}{\Omega_{nn}(1)};\quad \frac{\Omega_{n\nu}(x)}{\Omega_{n\nu}(1)}.$$[1]

Für $\Phi_{n\nu}(x)$ ergibt sich zunächst eine im Kreis $|x| < 1$ konvergente Potenzreihe; mit dem genannten Funktionszeichen sei jedoch allgemein die durch diese Potenzreihe definierte Funktion gemeint einschließlich ihrer eindeutigen analytischen Fortsetzung in der ganzen, von $x = 1$ bis $x = \infty$ längs der positiven reellen Achse aufgeschnittenen x-Ebene. Analog sind die übrigen in (II) genannten Funktionen zu definieren. Die hiebei notwendigen Verzweigungsschnitte seien kurz durch die Angabe der beiden Endpunkte in der Form $(0, 1)$, $(0, -\infty)$ etc. gekennzeichnet; sie verlaufen stets längs der reellen Achse, wobei $+\infty$ und $-\infty$ den unendlich fernen Punkt der positiven bzw. der negativen reellen Halbachse bedeutet.

[1] Die Integrale $\Omega_{n\nu}(x)$ werden später so normiert werden, daß $\Omega_{n\nu}(1)$ i. a. nicht verschwindet [vgl. (56)].

Die Verzweigungsschnitte und Potenzreihenentwicklungen der drei Funktionengruppen seien schematisch in der folgenden Übersicht zusammengestellt:

(III)

$$\begin{array}{lll}
\Phi_{n\nu}(x)\ (\nu=1,\ldots n);\ \textit{Schnitt}\ (1,+\infty);\ \textit{für}\ |x|<1 & \textit{Reihe in}\ x;\\
\Psi_{n\nu}(x)\ (\nu=1,\ldots n);\ \textit{Schnitt}\ (0,1);\ \textit{für}\ |x|>1 & \textit{Reihe in}\ \frac{1}{x};\\
\Omega_{n\nu}(x)\ (\nu=1,\ldots n);\ \textit{Schnitt}\ (0,-\infty);\ \textit{für}\ |x-1|<1 & \textit{Reihe in}\ x-1.
\end{array}$$

Zur eindeutigen Definition der Hauptintegrale selbst ist es noch notwendig, den Wert der Potenzen x^ρ und $(x-1)^\rho$ festzulegen, indem man einen beliebigen Schnitt von 0 bzw. 1 nach ∞ führt und einen bestimmten Hauptwert fixiert. Und zwar sollen diese Potenzen in der durch folgende Übersicht festgelegten Weise verstanden werden:

(IV)

$$\begin{array}{lll}
x^\rho & ;\ \textit{Schnitt}\ (0,-\infty);\ \textit{für}\ x=1 & \textit{sei}\quad x^\rho=1;\\
(-x)^\rho & ;\ \textit{Schnitt}\ (0,+\infty);\ \textit{für}\ x=-1 & \textit{sei}\quad (-x)^\rho=1;\\
(x-1)^\rho & ;\ \textit{Schnitt}\ (1,-\infty);\ \textit{für}\ x=2 & \textit{sei}\quad (x-1)^\rho=1;\\
(1-x)^\rho & ;\ \textit{Schnitt}\ (1,+\infty);\ \textit{für}\ x=0 & \textit{sei}\quad (1-x)^\rho=1.
\end{array}$$

Man definiert also in allen Fällen:

(IVa)
$$(a+bx)^\rho=e^{\rho\ln(a+bx)};\quad -\pi\leqq\Im[\ln(a+bx)]\leqq+\pi.$$

So ist z. B. das Integral $(x-1)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x)$ in der mit den Schnitten $(0,-\infty)$ und $(1,-\infty)$ versehenen x-Ebene definiert; die Schnitte fallen in diesem Beispiel teilweise zusammen.

Aus der Form (3) der hypergeometrischen Differentialgleichung lassen sich unmittelbar die beiden wichtigen Eigenschaften ablesen:

(V)

1. *Die hyperg. Diff. gl. ist symmetrisch bezüglich der Parameter* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *und symmetrisch bezüglich* $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$.
2. *Sie ändert sich nicht, wenn man die Variable x und die Parameter* α_i, β_i *bzw. durch* $\frac{1}{x}, 1-\beta_i, 1-\alpha_i$ $(i=1,2,\ldots n)$ *ersetzt.*

Die erste Eigenschaft ist zufolge der Definition (I) der Koeffizienten trivial. — Bei der an zweiter Stelle genannten Substitution geht A_k in $(-1)^k B_k$, B_k in $(-1)^k A_k$, also die Differentialgleichung in die folgende über:

$$\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\left(A_{n-\nu}-B_{n-\nu}\frac{1}{x}\right)\frac{d^\nu y}{[d\ln(\frac{1}{x})]^\nu}=0\quad\text{oder:}$$

$$(-1)^n\sum_{\nu=0}^{n}(A_{n-\nu}x-B_{n-\nu})\frac{d^\nu y}{[d\ln x]^\nu}=0,\quad\text{was mit (3) identisch ist.}$$

Hieraus lassen sich gewisse Vertauschungsrelationen für die Integrale (10) folgern, welche auch für die Hauptintegrale selbst gültig sind, wenn die Konstanten $\Phi_{n\nu}(0)$, $\Psi_{n\nu}(\infty)$, $\Omega_{n\nu}(1)$ $(\nu=1,2,\ldots n)$ die entsprechenden Symmetrieeigenschaften besitzen. Dies soll später gezeigt und bis dahin die Formulierung der genannten Relationen aufgeschoben werden. [Siehe im folgenden (IX) (S. 22) und (X) (S. 29)!]

Zum Abschluß dieses Paragraphen sei noch der einfache Spezialfall $n=1$ behandelt, der den Ausgangspunkt für alle folgenden Induktionsschlüsse bildet.

Für $n=1$ nimmt (3) die Gestalt an:

(11)
$$(1-x)\frac{dy}{d\ln x}+(B_1-A_1x)y=0\quad\text{oder:}\quad x(1-x)\frac{dy}{dx}+(\beta_1-1-\alpha_1x)y=0.$$

Aus $\frac{y'}{y} = \frac{1-\beta_1}{x} + \frac{\alpha_1-\beta_1+1}{1-x}$ ergibt sich das allgemeine Integral:

(11a) $$y = C\, x^{1-\beta_1}(1-x)^{\beta_1-\alpha_1-1}.$$

Es kann in Umgebung der drei singulären Punkte in den Formen $x^{1-\beta_1}\,\Phi_{11}(x)$, $x^{-\alpha_1}\Psi_{11}(x)$, $(x-1)^{\sigma_1-1}\,\Omega_{11}(x)$ geschrieben werden [bezüglich σ_1 vgl. (7)], wobei sich für die hiemit eingeführten Funktionen in der durch (1) definierten Symbolik folgende Reihen ergeben:

(12) $$\frac{\Phi_{11}(x)}{\Phi_{11}(0)} = (1-x)^{\beta_1-\alpha_1-1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\binom{\beta_1-\alpha_1-1}{\lambda}x^{\lambda} = F\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_1\\ 1\end{matrix}\middle|\, x\right);$$

(13) $$\frac{\Psi_{11}(x)}{\Psi_{11}(\infty)} = (1-\tfrac{1}{x})^{\beta_1-\alpha_1-1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\binom{\beta_1-\alpha_1-1}{\lambda}(\tfrac{1}{x})^{\lambda} = F\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_1\\ 1\end{matrix}\middle|\, \tfrac{1}{x}\right);$$

(14) $$\frac{\Omega_{11}(x)}{\Omega_{11}(1)} = x^{1-\beta_1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\binom{1-\beta_1}{\lambda}(1-x)^{\lambda} = F\left(\begin{matrix}\beta_1-1\\ 1\end{matrix}\middle|\, 1-x\right).$$

§ 3. Rekursionsdarstellung der partikulären Integrale in Form bestimmter Integrale.

Den Inhalt dieses Paragraphen bildet der Beweis des folgenden Satzes:

Ist $y = J_{n-1}(x)$ ein partikuläres Integral der hypergeometrischen Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung [d. h. der Gleichung (3), wenn darin n durch $n-1$ ersetzt wird], so ist die Funktion:

(15) $$y = J_n(x) = C_n \int_{u_1}^{u_2} u^{\alpha_n-1}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1} J_{n-1}(xu)\,du$$

ein partikuläres Integral der hyperg. Diff. gl. n^{ter} Ordnung [also (3)], wenn die Grenzen u_1, u_2 so gewählt werden, daß der Ausdruck:

(16) $$u^{\alpha_n}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}\frac{d^{\nu}J_{n-1}(xu)}{[d\ln(xu)]^{\nu}}$$

für $u = u_1$ und $u = u_2$ und für alle $\nu = 1, 2, \ldots n$ verschwindet.

Dabei ist die noch näher zu präzisierende Voraussetzung zu machen, daß das Integral (15) sowie alle in folgender Ableitung vorkommenden Integrale konvergieren.

Die Koeffizienten der Diff. gl. $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mögen zur Unterscheidung gegenüber denen n^{ter} Ordnung durch Querstriche gekennzeichnet sein. Es bedeutet also $\bar{A}_k$ und $\bar{B}_k$ die k^{te} symmetrische Grundfunktion der $n-1$ Parameter $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots -\alpha_{n-1}$ bzw. $1-\beta_1$, $1-\beta_2, \ldots 1-\beta_{n-1}$ und $\bar{A}_0 = \bar{B}_0 = 1$. Außerdem soll $\bar{A}_{-1} = \bar{B}_{-1} = \bar{A}_n = \bar{B}_n = 0$ definiert werden. Dann drücken sich die Koeffizienten A_k, B_k durch $\bar{A}_k$, $\bar{B}_k$ folgendermaßen aus:

(17) $$A_k = \bar{A}_k + \bar{A}_{k-1}\alpha_n;\quad B_k = \bar{B}_k + \bar{B}_{k-1}(\beta_n - 1).$$

Ferner soll die vereinfachende Schreibweise eingeführt werden:

$$J_n^{(\nu)}(x) = \frac{d^{\nu}J_n(x)}{(d\ln x)^{\nu}} \quad \text{und:} \quad J_{n-1}^{(\nu)}(xu) = \frac{d^{\nu}J_{n-1}(xu)}{[d\ln(xu)]^{\nu}}.$$

Wegen $\frac{d\ln(xu)}{d\ln x} = 1$ folgt nun aus (15) die Darstellung:

$$(18) \qquad J_n^{(\nu)}(x) = C_n \int_{u_1}^{u_2} u^{\alpha_n - 1} (1-u)^{\beta_n - \alpha_n - 1} J_{n-1}^{(\nu)}(xu)\,du.$$

Für spätere Anwendung sei bemerkt, daß diese für konstante Grenzen u_1; u_2 selbstverständliche Gleichung zufolge der Voraussetzung über das Verschwinden des Ausdruckes (16) auch für die variable Grenze $u_i = \frac{1}{x}$ $(\nu \leqq n)$ gilt.

Da $J_{n-1}(x)$ der hyperg. Diff. gl. $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung genügt, so ist:

$$(\beta_n - \alpha_n - 1)\, C_n \int_{u_1}^{u_2} u^{\alpha_n - 1}(1-u)^{\beta_n - \alpha_n - 2}\left[\sum_{\nu=0}^{n-1} (\bar{B}_{n-1-\nu} - \bar{A}_{n-1-\nu}\, xu) J_{n-1}^{(\nu)}(xu)\right] du = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich in der Form $\sum_{\nu=0}^{n-1} U_\nu = 0$ schreiben, wo:

$$U_\nu = \bar{B}_{n-1-\nu}(\beta_n - \alpha_n - 1) C_n \int_{u_1}^{u_2} u^{\alpha_n - 1}(1-u)^{\beta_n - \alpha_n - 2} J_{n-1}^{(\nu)}(xu)\,du$$

$$- \bar{A}_{n-1-\nu}\, x(\beta_n - \alpha_n - 1) C_n \int_{u_1}^{u_2} u^{\alpha_n}(1-u)^{\beta_n - \alpha_n - 2} J_{n-1}^{(\nu)}(xu)\,du.$$

Zerlegt man das erste Integral in eine Summe, indem man sich den Integranden mit $1 = u + (1-u)$ multipliziert denkt, so erhält man:

$$U_\nu = \left[\bar{B}_{n-1-\nu} - \bar{A}_{n-1-\nu}\, x\right](\beta_n - \alpha_n - 1)\, C_n \int_{u_1}^{u_2} u^{\alpha_n}(1-u)^{\beta_n - \alpha_n - 2} J_{n-1}^{(\nu)}(xu)\,du$$

$$+ \bar{B}_{n-1-\nu}(\beta_n - \alpha_n - 1) C_n \int_{u_1}^{u_2} u^{\alpha_n - 1}(1-u)^{\beta_n - \alpha_n - 1} J_{n-1}^{(\nu)}(xu)\,du.$$

Das Integral im zweiten Summanden hat die Form (18); das Integral im ersten läßt sich durch partielle Integration folgenderweise umformen:

$$(\beta_n - \alpha_n - 1)\, C_n \int_{u_1}^{u_2} u^{\alpha_n}(1-u)^{\beta_n - \alpha_n - 2} J_{n-1}^{(\nu)}(xu)\,du = -\, C_n \left[u^{\alpha_n}(1-u)^{\beta_n - \alpha_n - 1} J_{n-1}^{(\nu)}(xu)\right]_{u_1}^{u_2}$$

$$+ \alpha_n C_n \int_{u_1}^{u_2} u^{\alpha_n - 1}(1-u)^{\beta_n - \alpha_n - 1} J_{n-1}^{(\nu)}(xu)\,du + C_n \int_{u_1}^{u_2} u^{\alpha_n}(1-u)^{\beta_n - \alpha_n - 1} \frac{d}{du} J_{n-1}^{(\nu)}(xu)\,du.$$

Der erste Summand verschwindet nach Voraussetzung; die beiden anderen haben die Form (18), da $\frac{d}{du} J_{n-1}^{(\nu)}(xu) = \frac{1}{u} J_{n-1}^{(\nu+1)}(xu)$ ist. Also folgt:

$$U_\nu = \left[\bar{B}_{n-1-\nu} - \bar{A}_{n-1-\nu}\, x\right]\left[\alpha_n J_n^{(\nu)}(x) + J_n^{(\nu+1)}(x)\right] + \bar{B}_{n-1-\nu}(\beta_n - \alpha_n - 1) J_n^{(\nu)}(x);$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} U_\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1}\left[\bar{B}_{n-1-\nu}(\beta_n - 1) - \bar{A}_{n-1-\nu}\,\alpha_n x\right] J_n^{(\nu)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1}\left[\bar{B}_{n-1-\nu} - \bar{A}_{n-1-\nu}\, x\right] J_n^{(\nu+1)}(x).$$

Zufolge der getroffenen Festsetzungen bezüglich der Indizes -1 und n bei $\bar{A}_k$, $\bar{B}_k$ darf zur ersten Summe das Glied mit $\nu = n$, zur zweiten jenes mit $\nu = -1$ hinzugefügt werden.

Ersetzt man ferner in der zweiten Summe den Summationsindex ν durch $\nu-1$, so kommt:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} U_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \left\{ \left[\overline{B}_{n-1-\nu} (\beta_n - 1) + \overline{B}_{n-\nu} \right] - \left[\overline{A}_{n-1-\nu} \alpha_n + \overline{A}_{n-\nu} \right] x \right\} J_n^{(\nu)}(x) = 0.$$

Das ist aber nach (17) identisch mit der zu beweisenden Gleichung:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \left[B_{n-\nu} - A_{n-\nu} x \right] J_n^{(\nu)}(x) = 0.$$

Als Grenzen u_1, u_2, für welche der Ausdruck (16) verschwinden soll, kommen die Werte 0, 1, ∞ und $\frac{1}{x}$ in Frage. Da sie singuläre Punkte des Integranden sind, ist auf die Konvergenz der hier benutzten Integrale zu achten; es handelt sich dabei um das Integral (18) mit den Werten $\nu = 0, 1, \ldots n$ und in folgenden drei Modifikationen:

a) in der unveränderten Form (18);

b) mit $\beta_n - \alpha_n - 2$ an Stelle von $\beta_n - \alpha_n - 1$;

c) mit α_n und $\beta_n - \alpha_n - 2$ an Stelle von $\alpha_n - 1$ bzw. $\beta_n - \alpha_n - 1$.

Die alle diese Fälle umfassende Konvergenzbedingung bzw. hinsichtlich der Grenze $u_i = 1, 0, \infty$ ist zugleich für das Verschwinden des Ausdruckes (16) an der Stelle $u = u_i$ hinreichend, wenn für x die Werte 1, 0, ∞ ausgeschlossen werden. Für $u_i = 1$ lautet nämlich diese Bedingung: $\Re(\beta_n - \alpha_n) > 1$. Stellt man ferner $J_{n-1}(t)$ als Linearkombination der zu 0 bzw. ∞ gehörigen Hauptintegrale dar, so setzt sich $J_{n-1}^{(\nu)}(t)$ aus Reihenentwicklungen der Form: $t^r \sum_{\lambda=0}^{\infty} (r+\lambda)^\nu a_\lambda t^\lambda$ bzw. $t^s \sum_{\lambda=0}^{\infty} (s-\lambda)^\nu b_\lambda t^{-\lambda}$ zusammen. Daher lautet die zur Grenze 0 bzw. ∞ gehörige Konvergenzbedingung: $\Re(\alpha_n - 1 + r_0) > -1$ bzw. $\Re(\alpha_n + [\beta_n - \alpha_n - 1] + s_0) < -1$, wobei r_0 unter den verschiedenen Exponenten r den kleinsten, s_0 unter den s den größten Realteil besitzen möge.

Dagegen für $u_i = \frac{1}{x}$ bedeutet die Bedingung für das Verschwinden des Ausdruckes (16), nämlich: $\lim_{t \to 1} J_{n-1}^{(\nu)}(t) = 0$, eine schärfere Einschränkung als die zugehörige Konvergenzbedingung.

Schreibt man nun $J_{n-1}(t)$ als Linearkombination der zu $t = 1$ gehörigen Hauptintegrale, also in der Form:

$$J_{n-1}(t) = (t-1)^{\sigma_{n-1}-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (t-1)^\lambda + \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda (t-1)^\lambda,$$

und benutzt die Umformung:

$$\frac{d(t-1)^\lambda}{d \ln t} = \lambda t (t-1)^{\lambda-1} = \lambda (t-1)^{\lambda-1} + \lambda \cdot (t-1)^\lambda,$$

so findet man durch vollständige Induktion:

$$J_{n-1}^{(\nu)}(t) = (t-1)^{\sigma_{n-1}-\nu-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} m_\lambda (t-1)^\lambda + \sum_{\lambda=0}^{\infty} n_\lambda (t-1)^\lambda;$$

dabei ist n_λ eine Linearkombination von b_λ, $b_{\lambda+1}$, $\ldots$ $b_{\lambda+\nu}$, speziell n_0 eine solche von $b_0, b_1, \ldots b_\nu$. Soll also $J_{n-1}^{(\nu)}(1) = 0$ sein für $\nu = 0, 1, \ldots n$, so müssen die Koeffizienten $b_0, b_1, \ldots b_n$ sämtlich verschwinden, d. h. für $J_{n-1}(t)$ darf nur das mehrdeutige Hauptintegral des zu 1 gehörigen Fundamentalsystems gewählt werden. Außerdem muß $\Re(\sigma_{n-1}) > n+1$ sein.

Betrachten wir nun die durch $J_n(x) = C_n \cdot \int_{u_1}^{1} \ldots du$ [siehe (15)] definierte Funktion unter der Voraussetzung, daß die auf u_1 bezügliche Bedingung erfüllt sei! $J_n(x)$ ist also eine für $\Re(\beta_n - \alpha_n) > 0$ definierte analytische Funktion der Variabeln x sowie der Parameter α_i, β_i (i = 1, . . n), welche insbesondere für $\Re(\beta_n - \alpha_n) > 1$ ein partikuläres Integral der Diff. gl. (3) darstellt. Nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung folgt hieraus, daß $J_n(x)$ auch für $0 < \Re(\beta_n - \alpha_n) \leqq 1$ dieser Diff. gl. genügt. Nach dem gleichen Schluß kann die Bedingung $\Re(\sigma_{n-1}) > n+1$ durch die Konvergenzbedingung $\Re(\sigma_{n-1}) > 0$ und ebenso die auf die Stelle $u_i = \infty$ bezügliche Bedingung durch die etwas schwächere zugehörige Konvergenzbedingung des Integrales (15) ersetzt werden. So bleiben von den genannten Einschränkungen nur mehr die folgenden beiden bestehen:

(VI) *Die durch (15) dargestellte Funktion* $J_n(x)$ *ist partikuläres Integral der hyperg. Diff. gl., wenn 1. das Integral* $\int_{u_1}^{u_2} \ldots du$ *an den beiden Grenzen konvergiert;*

2. bei Auftreten der Integralgrenze $u_i = \frac{1}{x}$ *stets* $J_{n-1}(t) = (t-1)^{\sigma_{n-1}-1} \Omega_{n-1,\,n-1}(t)$ *gewählt wird.*

§ 4. *Rekursive Definition der Hauptintegrale.*

Für die Funktion $J_{n-1}(t)$ im Integranden des Ausdruckes (15) sollen nun die in (II) (S. 11) definierten Hauptintegrale gesetzt und die zugehörigen Grenzen u_1, u_2 so bestimmt werden, daß auch $J_n(x)$ ein Hauptintegral wird. Dadurch soll eine rekursive Definition der Hauptintegrale gewonnen werden.

Zu diesem Zweck soll neben der Form (15) der Integraldarstellung noch die aus ihr durch die Substitution $u = \frac{t}{x}$ hervorgehende Form benutzt werden:

$$\textbf{(19)} \qquad J_n(x) = C_n x^{1-\beta_n} \int_{t_1}^{t_2} t^{\alpha_n - 1} (x-t)^{\beta_n - \alpha_n - 1} J_{n-1}(t)\,dt \,. \quad [t_i = x u_i].$$

Dabei können für die Integralgrenzen t_1, t_2 irgend zwei der Werte 0, 1, ∞, x gewählt werden; bei Auftreten der Integralgrenze 1 ist stets $J_{n-1}(t) = (t-1)^{\sigma_{n-1}-1}\, \Omega_{n-1,\,n-1}(t)$ zu setzen.

Wählt man $(t_1, t_2) = (0, \infty)$, wobei der Integrationsweg den Punkt $t = 1$ nicht treffen möge, so ändert sich die Funktion $J_n(x)$ (19) nicht, wenn x einen ganzen Umlauf um den Punkt 1 auf einem den Integrationsweg nicht treffenden Kreise macht. Daher ist $J_n(x)$ bei dieser Wahl der Grenzen stets ein um $x = 1$ eindeutiges Integral, gleichgültig, welches partikuläre Integral für $J_{n-1}(t)$ gewählt wird.

Für $(t_1, t_2) = (1, \infty)$ ist $J_{n-1}(t) = (t-1)^{\sigma_{n-1}-1}\, \Omega_{n-1,\,n-1}(t)$ zu wählen; beschreibt x einen den Integrationsweg nicht treffenden Kreis um den Nullpunkt, so bleibt der Wert des bestimmten Integrales $\int_1^{\infty} \ldots dt$ ungeändert. Daher ist $J_n(x)$ ein für $x = 0$ zum Exponenten $1 - \beta_n$ gehöriges Integral, d. h. proportional zu $x^{1-\beta_n}\, \Phi_{nn}(x)$.

Für $(t_1, t_2) = (0,1)$, also wiederum $J_{n-1}(t) = (t-1)^{\sigma_{n-1}-1}\, \Omega_{n-1,\,n-1,}(t)$ möge $x = \frac{1}{\xi}$ und $t = \frac{1}{\tau}$ gesetzt werden:

(19a) $$J_n(x) = C_n \xi^{\alpha_n} \int_1^{\infty} \tau^{-\beta_n} (\tau-\xi)^{\beta_n-\alpha_n-1} J_{n-1}(\tfrac{1}{\tau})\, d\tau.$$

Der gleiche Schluß wie vorhin lehrt, daß $J_n(x)$ ein für $\xi = 0$ zum Exponenten α_n gehöriges Integral, also proportional zu $x^{-\alpha_n}\Psi_{nn}(x)$ ist.

Weiterhin ergibt sich aus (15) unter der Annahme $J_{n-1}(t) = t^r g(t)$ die Gleichung:

(19b) $$J_n(x) = x^r C_n \int_{u_1}^{u_2} u^{\alpha_n+r-1}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1} g(xu)\, du.$$

Bei der Wahl $J_{n-1}(t) = t^{1-\beta_\nu}\Phi_{n-1,\nu}(t)$ ist $r = 1-\beta_\nu$ und $g(t)$ für $|t|<1$ regulär. Soll nun $g(xu)$ längs des ganzen Integrationsweges $\int_{u_1}^{u_2}$ regulär, also daselbst (für endliche Werte von x) $|xu|<1$ sein, so kommen für die Grenzen (u_1, u_2) nur die Werte (0,1) in Frage. Bei dieser Wahl ist in der Tat für $|x|<1$ wegen $|u|\leqq 1$ die Funktion $g(xu)$ und daher auch das Integral $\int_0^1 \ldots du$ eine reguläre Funktion von x; folglich ist $J_n(x)$ ein für $x = 0$ zum Exponenten $r = 1-\beta_\nu$ gehöriges Integral, d.h. proportional zu $x^{1-\beta_\nu}\Phi_{n\nu}(x)$.

Bei der Wahl $J_{n-1}(t) = t^{-\alpha_\nu}\Psi_{n-1,\nu}(t)$ ist $r = -\alpha_\nu$ und $g(t)$ für $|t|>1$ regulär. Es folgt analog, daß für $(u_1, u_2) = (1, \infty)$ das Integral $\int_{u_1}^{u_2}$ eine im Bereich $|x|>1$ reguläre Funktion von x, mithin $J_n(x)$ proportional zu $x^{-\alpha_\nu}\Psi_{n\nu}(x)$ ist.

In der Darstellung (19) heißen in diesen beiden Fällen die Integralgrenzen $(t_1, t_2) = (0, x)$ bzw. $= (x, \infty)$.

Damit sind für (t_1, t_2) alle Kombinationen erschöpft bis auf den Fall (1, x), in dem wiederum $J_{n-1}(t) = (t-1)^{\sigma_{n-1}-1}\Omega_{n-1,n-1}(t)$ zu setzen ist. Nimmt man hiebei im Integral (19) die Transformation $x = 1+\xi$, $t = 1+\xi u$ vor, also: $t-1 = \xi u$, $x-t = \xi(1-u)$ [bezüglich σ_{n-1} vgl. (7); das zu transformierende Integral vgl. im folgenden (22.1)], so kommt:

(19c) $$J_n(x) = C_n\, \xi^{\sigma_n-1}(1+\xi)^{1-\beta_n} \int_0^1 u^{\sigma_n-1-1}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}(1+\xi u)^{\alpha_n-1}\Omega_{n-1,n-1}(1+\xi u)\, du.$$

Da $|u|\leqq 1$ ist, sind für $|\xi|<1$ die Funktionen $(1+\xi u)^{\alpha_n-1}$ und $\Omega_{n-1,n-1}(1+\xi u)$, mithin auch das Integral $\int_0^1 \ldots du$ reguläre Funktionen von ξ. Daher ist $J_n(x)$ ein für $\xi = 0$ zum Exponenten σ_n-1 gehöriges Integral, d.h. proportional zu $(x-1)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x)$.

Diese Ergebnisse mögen nun in der nachfolgenden Übersicht zusammengestellt werden — vorbehaltlich einzelner notwendiger Erläuterungen, die sich hieran noch anschließen werden. Der Einfachheit wegen seien bei dieser Gelegenheit für die willkürlichen Konstanten C_n in den einzelnen Fällen gleich jene Werte angegeben, die sich auf Grund späterer Untersuchungen als zweckmäßig erweisen werden. Die Integrale mögen aus technischen Gründen nach gewissen gemeinsamen Eigenschaften in drei Gruppen gegliedert werden. In der ersten und dritten Gruppe kann für den Index ν jeder der Werte $1, 2, \ldots n-1$ eintreten.

I. Gruppe.

(20) $$x^{1-\beta_\nu}\Phi_{n\nu}(x) = \frac{x^{1-\beta_n}}{\Gamma(\beta_n-\alpha_n)} \int_0^x t^{\alpha_n-\beta_\nu}(x-t)^{\beta_n-\alpha_n-1}\Phi_{n-1,\nu}(t)\, dt;$$

(21) $$x^{-\alpha_\nu}\Psi_{n\nu}(x) = \frac{x^{1-\beta_n}}{\Gamma(\beta_n-\alpha_n)}\int_x^\infty t^{\alpha_n-1-\alpha_\nu}(t-x)^{\beta_n-\alpha_n-1}\Psi_{n-1,\nu}(t)\,dt;$$

(22)

(22.1) $$(x-1)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x) = \frac{x^{1-\beta_n}}{\Gamma(\beta_n-\alpha_n)}\int_1^x t^{\alpha_n-1}(x-t)^{\beta_n-\alpha_n-1}(t-1)^{\sigma_{n-1}-1}\Omega_{n-1,n-1}(t)\,dt;$$

(22.2) $$(1-x)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x) = \frac{x^{1-\beta_n}}{\Gamma(\beta_n-\alpha_n)}\int_x^1 t^{\alpha_n-1}(t-x)^{\beta_n-\alpha_n-1}(1-t)^{\sigma_{n-1}-1}\Omega_{n-1,n-1}(t)\,dt.$$

II. Gruppe.

(23) $$x^{1-\beta_n}\Phi_{nn}(x) = \Gamma(\alpha_n+1-\beta_n)\,x^{1-\beta_n}\int_1^\infty t^{\alpha_n-1}(t-x)^{\beta_n-\alpha_n-1}(t-1)^{\sigma_{n-1}-1}\Omega_{n-1,n-1}(t)\,dt;$$

(24) $$x^{-\alpha_n}\Psi_{nn}(x) = \Gamma(\alpha_n+1-\beta_n)\,x^{1-\beta_n}\int_0^1 t^{\alpha_n-1}(x-t)^{\beta_n-\alpha_n-1}(1-t)^{\sigma_{n-1}-1}\Omega_{n-1,n-1}(t)\,dt.$$

III. Gruppe.

(25) $$\Omega_{n\nu}(x) = \Gamma(\alpha_n+1-\beta_n)\,x^{1-\beta_n}\int_{-\infty}^0(-t)^{\alpha_n-1}(x-t)^{\beta_n-\alpha_n-1}(1-t)^{\tau}\Omega_{n-1,\nu}(t)\,dt,$$

wo $\tau = \sigma_{n-1}-1$ für $\nu = n-1$; $\tau = 0$ für $\nu < n-1$ sei;

(26) $$\Omega^{I}_{n\nu}(x) = \Gamma(\alpha_n+1-\beta_n)\,x^{1-\beta_n}\int_{-\infty}^0(-t)^{\alpha_n-\beta_\nu}(x-t)^{\beta_n-\alpha_n-1}\Phi_{n-1,\nu}(t)\,dt;$$

(27) $$\Omega^{II}_{n\nu}(x) = \Gamma(\alpha_n+1-\beta_n)\,x^{1-\beta_n}\int_{-\infty}^0(-t)^{\alpha_n-1-\alpha_\nu}(x-t)^{\beta_n-\alpha_n-1}\Psi_{n-1,\nu}(t)\,dt.$$

Zu diesen rekursiven Definitionen kommen noch die folgenden Definitionen für den Anfangswert $n=1$: [Vgl. (11) bis (14)]

(28) $$x^{1-\beta_1}\Phi_{11}(x) = \Gamma(\alpha_1+1-\beta_1)\,x^{1-\beta_1}(1-x)^{\beta_1-\alpha_1-1};\quad \Phi_{11}(x) = \Gamma(\alpha_1+1-\beta_1)(1-x)^{\beta_1-\alpha_1-1}.$$

(29) $$x^{-\alpha_1}\Psi_{11}(x) = \Gamma(\alpha_1+1-\beta_1)\,x^{1-\beta_1}(x-1)^{\beta_1-\alpha_1-1};\quad \Psi_{11}(x) = \Gamma(\alpha_1+1-\beta_1)\left(1-\tfrac{1}{x}\right)^{\beta_1-\alpha_1-1}.$$

(30) $$(1-x)^{\sigma_1-1}\Omega_{11}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta_1-\alpha_1)}\,x^{1-\beta_1}(1-x)^{\beta_1-\alpha_1-1};\quad \Omega_{11}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta_1-\alpha_1)}\,x^{1-\beta_1}.$$

Unter den „Hauptintegralen" sollen von jetzt ab genauer gesprochen die durch diese Rekursionsformeln definierten Integrale einschließlich der dritten Gruppe und mit Berücksichtigung ihrer Normierung hinsichtlich der konstanten Faktoren verstanden werden. Die dritte Gruppe enthält drei Systeme von je $n-1$ am Einheitspunkt regulären Integralen, wobei für jedes derselben später unter gewissen Einschränkungen die lineare Unabhängigkeit der $n-1$ Integrale gezeigt wird [siehe (XIV), S. 51]. Mit Hinzunahme der schon in § 2 ausgesprochenen Voraussetzungen liefern also die vorstehenden Rekursionsformeln:

ein Fundamentalsystem um $x=0$, nämlich (20) mit (23);
„ „ „ $x=\infty$ „ (21) „ (24);

endlich drei Fundamentalsysteme um $x = 1$, nämlich (22) bzw. zusammen mit (25), (26) und (27).

Der Bau der Ausdrücke (20) bis (27) läßt sich in folgende Regel zusammenfassen: Das durch (19) definierte partikuläre Integral $J_n(x)$ ist (geeignete Wahl von C_n vorausgesetzt) ein zum singulären Punkt x_0 gehöriges Hauptintegral, wenn entweder $(t_1,t_2) = (x_0, x)$ angenommen und für $J_{n-1}(t)$ gleichfalls ein zu x_0 gehöriges Hauptintegral gewählt wird (I. Gruppe); oder wenn für die Grenzen (t_1,t_2) die beiden anderen singulären Punkte gewählt werden (II. und III. Gruppe). Im zweiten Fall darf für $J_{n-1}(t)$ ein beliebiges Hauptintegral eingesetzt werden, wofern nicht das Auftreten der Integralgrenze 1 ebenso wie im ersten Fall die Beschränkung auf das zu $t = 1$ gehörige und daselbst mehrdeutige Hauptintegral fordert.

Zur vollständigen Definition der Hauptintegrale sind noch gewisse Eindeutigkeitsfestsetzungen bezüglich der Werte der einzelnen Faktoren im Integranden und der Wahl des Integrationsweges in der aufgeschnittenen t-Ebene nötig.

Die Funktionen $\Phi_{n-1,\nu}(t)$, $\Psi_{n-1,\nu}(t)$, $\Omega_{n-1,\nu}(t)$ sowie die Potenzen t^ρ, $(-t)^\rho$, $(t-1)^\rho$, $(1-t)^\rho$ sind in dem schon früher [siehe (III) und (IV) (S. 12)] festgelegten Sinn mit Einführung der zugehörigen Schnitte zu verstehen. Dazu macht die Potenz $(t-x)^\rho$ bzw. $(x-t)^\rho$ die Einführung eines weiteren Schnittes $(x, -\infty)$ bzw. $(x, +\infty)$ nötig, der von $t = x$ parallel und gleichgerichtet der negativen bzw. der positiven reellen Achse nach ∞ verlaufen soll. Die Übersicht (IV) ist also für t anstelle von x durch die folgenden beiden Festsetzungen zu ergänzen:

(VII)

$(t-x)^\rho$; *Schnitt* $(x,-\infty)$; *für* $t = x+1$ *sei* $(t-x)^\rho = 1$;
$(x-t)^\rho$; *Schnitt* $(x,+\infty)$; *für* $t = x-1$ *sei* $(x-t)^\rho = 1$.

(VIII)

Als Integrationswege sind in den einzelnen Fällen folgende Linien zu wählen:

Für die Integrale zwischen endlichen Grenzen, also $\int_0^x$ (20), $\int_1^x$ (22), $\int_0^1$ (24) *die geradlinige Verbindung dieser beiden Punkte;*

für $\int_x^\infty$ (21) *der von* x *nach* ∞ *verlaufende Halbstrahl, dessen rückwärtige Verlängerung durch den Nullpunkt geht;*

für $\int_1^\infty$ (23) *die positive reelle Achse;*

für $\int_{-\infty}^0$ (25) *die negative reelle Achse und zwar die obere Seite des Schnittes* $(0, -\infty)$;

für die beiden Integrale $\int_{-\infty}^0$ (26) *und* (27) *die negative reelle Achse.*

Man beachte in allen diesen Fällen die Lage der durch den Integranden automatisch vorgeschriebenen Verzweigungsschnitte; mit einziger Ausnahme des Falles $\Omega_{n,\nu}(x)$ $(\nu < n)$ verläuft der Integrationsweg nie längs eines solchen. Selbstverständlich sind die getroffenen Festsetzungen so zu verstehen, daß (ohne Einfluß auf den Wert des Integrales) Integrationsweg und Schnitte derart stetig verändert werden dürfen, daß sie sich dabei niemals überschneiden.

Insbesondere sei folgende, für später nützliche Abänderung eines Integrationsweges ausdrücklich erwähnt:

(VIIIa) *In den beiden Integralen* $\int_{-\infty}^{0}$ (26) *und* (27) *darf der Integrationsweg in den durch* x *gehenden Halbstrahl von* 0 *nach* ∞ *verlegt werden, wenn er dabei dem Punkt* x *selbst in einem kleinen Bogen derart ausweicht, daß* x *und* 1 *stets auf der gleichen Seite desselben liegen.*

Die bei der zweiten und dritten Gruppe mögliche Beschränkung der Integrationsvariabeln auf reelle Werte läßt sich auch in der ersten Gruppe durchführen, wenn man die transformierten Darstellungen (19b) und (19c) benutzt; um ihres praktischen Nutzens willen seien sie noch explizite angegeben.

Es bedeute also u im folgenden eine reelle Variable und man verstehe die Potenz p^ρ mit positiver reeller Basis stets in dem Sinn $e^{\rho \ln p}$ mit $\Im[\ln p] = 0$. Setzt man nun $t = xu$, so folgt:

für (20): $0 \leqq u \leqq 1$; $t^\rho = x^\rho u^\rho$; $(x-t)^\rho = x^\rho (1-u)^\rho$;
für (21): $1 \leqq u$; $t^\rho = x^\rho u^\rho$; $(t-x)^\rho = x^\rho (u-1)^\rho$;

und man erhält die beiden Integrale [vgl. (19b)]:

(20a) $$\Phi_{n\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta_n - \alpha_n)} \int_0^1 u^{\alpha_n - \beta_\nu} (1-u)^{\beta_n - \alpha_n - 1} \Phi_{n-1,\nu}(xu)\, du;$$

(21a) $$\Psi_{n\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta_n - \alpha_n)} \int_1^\infty u^{\alpha_n - 1 - \alpha_\nu} (u-1)^{\beta_n - \alpha_n - 1} \Psi_{n-1,\nu}(xu)\, du.$$

Analog setzt man in (22) $t = 1 + (x-1)u$, wo $0 \leqq u \leqq 1$, und erhält:

für (22.1): $(t-1)^\rho = (x-1)^\rho u^\rho$; $(x-t)^\rho = (x-1)^\rho (1-u)^\rho$;
für (22.2): $(1-t)^\rho = (1-x)^\rho u^\rho$; $(t-x)^\rho = (1-x)^\rho (1-u)^\rho$;

also in beiden Fällen [vgl. (19c)]:

(22a) $$\Omega_{nn}(x) = \frac{x^{1-\beta_n}}{\Gamma(\beta_n - \alpha_n)} \int_0^1 u^{\sigma_n - 1 - 1} (1-u)^{\beta_n - \alpha_n - 1} (1 + [x-1]u)^{\alpha_n - 1}\, \Omega_{n-1,n-1}(1 + [x-1]u)\, du.$$

Damit ist die Äquivalenz der beiden Gleichungen(22.1) und (22.2) bewiesen.

Man kann bei diesen drei Integralen auch, wie es die vorstehenden transformierten Formen nahelegen, die Verzweigungsschnitte der t-Ebene in eine zum Integrationsweg parallele Lage bringen, so daß sich für alle Fälle mit einziger Ausnahme von $\Omega_{n,\nu}(x)$ $[\nu < n]$ die gemeinsame Regel aufstellen läßt: Durch die drei endlichen singulären Punkte $t = 0, 1, x$ des Integranden sind drei Gerade und auf jeder derselben drei Abschnitte bestimmt; der Integrationsweg verläuft stets längs eines dieser Abschnitte, zwei Verzweigungsschnitte längs der beiden anderen Abschnitte derselben Geraden und der dritte längs eines vom dritten singulären Punkt ausgehenden und zu dieser Geraden parallelen Halbstrahles. — Der Fall, daß x reell ist, ist stets auf Grund einer Grenzbetrachtung unter einen der beiden Hauptfälle $\Im(x) > 0$ und $\Im(x) < 0$ zu subsumieren.

Wie bereits aus den bisherigen Betrachtungen hervorgeht, fallen die Funktionen $\Omega_{n\nu}(x)$ $(\nu < n)$ etwas aus dem gesetzmäßigen Rahmen der übrigen Integrale heraus. Schon ihre Definition (25) enthält nach (VIII) eine einseitige Willkür; man könnte ebensogut jenes

System von $n-1$ am Einheitspunkt regulären Integralen betrachten, für welches in der Integraldefinition (25) der Integrationsweg auf der unteren Seite des Schnittes $(0, -\infty)$ verläuft. Vor allem aber erweisen sich die Integrale $\Omega_{n\nu}(x)$ $(\nu < n)$ als ungeeignet für die analytischen Fortsetzungen nach den Punkten 0 und ∞. Aus diesen Gründen wurden noch die beiden Systeme $\Omega^{I}_{n\nu}(x)$ und $\Omega^{II}_{n\nu}(x)$ definiert, hinter denen im folgenden die Integrale $\Omega_{n\nu}(x)$ völlig zurücktreten werden. Dabei wird der Nachteil, gleichzeitig zwei Systeme um $x=1$ benützen zu müssen, durch den Vorzug einfacher und übersichtlicher Formeln weit überwogen.

§ 5. *Ergänzende Bemerkungen und Folgerungen.*

Durch die Integraldarstellungen (20) bis (27) sind die Hauptintegrale zunächst nur für jene eingeschränkten Bereiche der Parameter definiert, für welche die betreffenden bestimmten Integrale konvergieren. Nachfolgend seien diese Konvergenzbedingungen zusammengestellt; bei ihrer Aufstellung ist zu beachten, daß das zum singulären Punkt t_0 gehörige Integral $J_{n-1}(t)$ an einer von t_0 und x verschiedenen Grenze t_1 als Linearkombination der $n-1$ zu t_1 gehörigen Hauptintegrale zu denken ist.

Konvergenzbedingungen:

(20b) für (20): $\Re(\beta_n) > \Re(\alpha_n) > -1+\Re(\beta_\nu)$;

(21b) für (21): $\Re(\alpha_n) < \Re(\beta_n) < +1+\Re(\alpha_\nu)$;

(22b) für (22): $\Re(\beta_n - \alpha_n) > 0$; $\Re(\sigma_{n-1}) > 0$;

(23b) für (23): $\Re(\sigma_{n-1}) > 0$; $\Re(\beta_n) < +1+\Re(\alpha_j)$; $[j = 1, 2, \ldots n-1]$

(24b) für (24): $\Re(\sigma_{n-1}) > 0$; $\Re(\alpha_n) > -1+\Re(\beta_j)$; [„ „]

(25b) für (25): $\Re(\alpha_n) > -1+\Re(\beta_j)$; $\Re(\beta_n) < +1+\Re(\alpha_j)$; [„ „]

(26b) für (26): $\Re(\alpha_n) > -1+\Re(\beta_\nu)$; $\Re(\beta_n) < +1+\Re(\alpha_j)$; [„ „]

(27b) für (27): $\Re(\alpha_n) > -1+\Re(\beta_j)$; $\Re(\beta_n) < +1+\Re(\alpha_\nu)$. [„ „]

Für Parameterwerte, die diesen Bereichen nicht angehören, ist also eine andersartige Darstellung des betreffenden Hauptintegrales nötig.

Ein erstes brauchbares Hilfsmittel zu diesem Zweck bildet das Pochhammer'sche Doppelumlaufintegral,[1] das Pochhammer selbst schon auf die analogen Integraldarstellungen bei der hypergeometrischen Diff. gl. 2ter Ordnung anwandte (l. c. § 3), so daß sich hier eine nähere Ausführung erübrigt. Es sei lediglich auf einen prinzipiellen Unterschied zwischen dem genannten Beispiel mit $n=2$ und dem allgemeinen Fall hingewiesen. Einer Darstellung mittels Doppelumlaufintegrales sind natürlich nur jene bestimmten Integrale fähig, deren Integranden sich beim Umlauf um die als Grenzen dienenden singulären Punkte lediglich mit einem (von 1 verschiedenen) konstanten Faktor multiplizieren. Diese Bedingung erfüllen im Fall $n=2$ alle Integraldarstellungen, im vorliegenden allgemeinen Fall jedoch nur die Integrale der ersten Gruppe. Bei den übrigen muß man sich also mit einem Schleifenintegral begnügen und die gerade besonders einschneidende Konvergenzbedingung hinsichtlich

[1] Pochhammer, Math. Ann. 35, p. 470.

der einen Grenze beibehalten. Eine Ausnahme macht das Integral (25), welches auch keine Schleifenintegraldarstellung zuläßt.

Beispielshalber sei das Integral (21) herausgegriffen; hier läßt sich $\int_x^\infty$ durch: $\frac{1}{[1-e^{2\pi i(\beta_n-\alpha_n)}]\,[1-e^{2\pi i(\alpha_\nu-\beta_n)}]}\int_{U_{x,\infty}}$ ersetzen, wo $U_{x,\infty}$ einen Doppelumlauf bedeutet, der zuerst $t=\infty$ im positiven, dann $t=x$ im positiven, dann $t=\infty$ im negativen, endlich $t=x$ im negativen Sinn umkreist. Dabei ist zu bemerken, daß ein Umlauf um $t=\infty$ im positiven Sinn gleichwertig mit einem Umlauf um alle endlichen singulären Punkte 0, 1, x im negativen Sinne ist und daß letzterer im vorliegenden Fall durch einen Umlauf um die beiden Punkte 0, 1 allein ersetzt werden darf. Die neue Darstellung für $x^{-\alpha_\nu}\,\Psi_{n\nu}(x)$ ist für alle Parameterwerte sinnvoll mit der Einschränkung, daß die beiden Differenzen $\beta_n-\alpha_n$ und $\beta_n-\alpha_\nu$ nicht ganzzahlig sein sollen.

Ein zweites, noch wichtigeres Hilfsmittel werden im Folgenden die Reihenentwicklungen der Hauptintegrale liefern; und zwar ist diese Darstellung nach Auffindung der Übergangssubstitutionen nicht an einen beschränkten Konvergenzbereich der x-Ebene gebunden.

In beiden Fällen schließt man ebenso, wie es in § 3 bei Begründung der Bedingungen (VI) geschah, daß die so dargestellten Funktionen auch im erweiterten Gültigkeitsbereich partikuläre Integrale der hyperg. Diff. gl. bleiben. Von den zwei in (VI) ausgesprochenen Bedingungen bedeutet also nur die zweite eine wesentliche, d. h. von der Art der Darstellung unabhängige Einschränkung.

Das Hilfsmittel des Doppelumlaufintegrales ist für die Zwecke vorliegender Arbeit entbehrlich. Soll nämlich aus den Integraldarstellungen (20) bis (27) eine Reihenentwicklung oder Funktionalbeziehung hergeleitet werden, so sind zwar zunächst die Konvergenzbedingungen zu berücksichtigen und ihre Verträglichkeit festzustellen, so daß wenigstens ein gewisser Bereich von Parameterwerten α_i, β_i existiert, innerhalb dessen die fragliche Relation gilt. Sind nun aber beide Seiten dieser Relation auch außerhalb des betreffenden Bereiches definierte analytische Funktionen, also etwa vermöge des ersten oder zweiten genannten Hilfsmittels darstellbar, so folgt nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung, daß die Relation auch im erweiterten Parameterbereich gültig bleibt. Dieser Gedankengang sei hier prinzipiell festgelegt, um ihn nicht in jedem Einzelfalle wiederholen zu müssen.

Zum Schlusse dieses Paragraphen soll der angekündigte Beweis für jene Vertauschungsrelationen der Hauptintegrale erbracht werden, die der zweiten in (V) (S. 12) genannten Eigenschaft der hyperg. Diff. gl. entsprechen:

(IX) *Vertauscht man die Variable* x *mit* $\frac{1}{x}$ *und die Parameter* α_i *mit* $1-\beta_i$ $(i=1,..n)$, *so vertauschen sich die Hauptintegrale* $x^{1-\beta_\nu}\,\Phi_{n\nu}(x)$ *mit* $x^{-\alpha_\nu}\,\Psi_{n\nu}(x)$ $(\nu=1,..n)$; $(x-1)^{\sigma_n-1}\,\Omega_{nn}(x)$ mit $(1-x)^{\sigma_n-1}\,\Omega_{nn}(x)$; $\Omega^{I}_{n\nu}(x)$ *mit* $\Omega^{II}_{n\nu}(x)$ $(\nu=1,..n-1)$.

Ausführlich geschrieben:

(31a) $$\Phi_{n\nu}\left(\begin{matrix}1-\beta_1,\ldots 1-\beta_n\\ 1-\alpha_1,\ldots 1-\alpha_n\end{matrix}\middle|\,\frac{1}{x}\right)=\Psi_{n\nu}\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ldots \alpha_n\\ \beta_1,\ldots \beta_n\end{matrix}\middle|\,x\right);$$

(31b) $$\Psi_{n\nu}\left(\begin{matrix}1-\beta_1,\ldots 1-\beta_n\\ 1-\alpha_1,\ldots 1-\alpha_n\end{matrix}\middle|\,\frac{1}{x}\right)=\Phi_{n\nu}\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ldots \alpha_n\\ \beta_1,\ldots \beta_n\end{matrix}\middle|\,x\right);$$

(32a) $$\left(\tfrac{1}{x}-1\right)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}\left(\begin{matrix}1-\beta_1,\ \dots\ 1-\beta_n\\ 1-\alpha_1,\ \dots\ 1-\alpha_n\end{matrix}\middle|\,\tfrac{1}{x}\right)=(1-x)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ \dots\ \alpha_n\\ \beta_1,\ \dots\ \beta_n\end{matrix}\middle|\,x\right);$$

(32b) $$\Omega^{I}_{n\nu}\left(\begin{matrix}1-\beta_1,\ \dots\ 1-\beta_n\\ 1-\alpha_1,\ \dots\ 1-\alpha_n\end{matrix}\middle|\,\tfrac{1}{x}\right)=\Omega^{II}_{n\nu}\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ \dots\ \alpha_n\\ \beta_1,\ \dots\ \beta_n\end{matrix}\middle|\,x\right);$$

(32c) $$\Omega^{II}_{n\nu}\left(\begin{matrix}1-\beta_1,\ \dots\ 1-\beta_n\\ 1-\alpha_1,\ \dots\ 1-\alpha_n\end{matrix}\middle|\,\tfrac{1}{x}\right)=\Omega^{I}_{n\nu}\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ \dots\ \alpha_n\\ \beta_1,\ \dots\ \beta_n\end{matrix}\middle|\,x\right).$$

Für $n=1$ bestätigt sich die Behauptung unmittelbar an den Darstellungen (28), (29) und (30). Ist sie bereits für $n-1$ bewiesen, so substituiere man zum Zweck der vollständigen Induktion auf der rechten Seite der Integraldarstellungen (20) bis (27) für die Integrationsvariable t, die Variable x und die Parameter α_i, β_i $(i=1,\dots n)$ bzw. die Größen $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{x}$ $1-\beta_i$, $1-\alpha_i$. Hierdurch vertauschen sich die rechten Seiten von (20) und (21); (22.1) und (22.2); (23) und (24); (26) und (27). Bei den beiden letzten Integralen sind die Umformungen: $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right)^{\beta_n-\alpha_n-1}=\left[\frac{x-t}{x(-t)}\right]^{\beta_n-\alpha_n-1}$ und $\frac{1}{t^2}=(-t)^{-2}$ zu beachten. Damit ist die Behauptung bewiesen.

In ähnlicher Weise erschließt man aus der Integraldarstellung (25), daß bei den in (IX) genannten Vertauschungen die Integrale $\Omega_{n\nu}(x)$ sich lediglich mit einem konstanten Faktor der Form $\pm\, e^{\pm i\pi\sigma_n}$ multiplizieren, auf dessen genauere Bestimmung hier aber verzichtet werden soll.

Zweites Kapitel.

Reihenentwicklungen der Hauptintegrale.

§ 6. Reihenentwicklungen der Hauptintegrale der ersten Gruppe.

Durch geringfügige Abänderungen der rekursiven Definitionen (20a) und (22a) sollen zwei Hilfsfunktionen eingeführt werden, welche eine bequeme Darstellung der Hauptintegrale (abgesehen von den um 1 regulären) ermöglichen.

Die Funktion:

(33a) $$f_n(x)=f\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ \alpha_n\\ \beta_1,\ \beta_2,\ \dots\ \beta_n\end{matrix}\middle|\,x\right)$$

sei folgenderweise rekursiv definiert:

(33) $$f_n(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta_n-\alpha_n)}\int_0^1 u^{\alpha_n-1}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}f_{n-1}(xu)\,du;\qquad f_0(x)=\frac{1}{1-x}.$$

Existiert eine für $|x|<1$ konvergente Reihenentwicklung: $f_{n-1}(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty} d_{n-1,\lambda}\,x^{\lambda}$, so läßt sich der Integrand von (33) für $|x|<1$ in eine für alle Werte u des Integrationsweges gleichmäßig konvergierende Reihe entwickeln. Daher folgt:

$$f_n(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty} d_{n-1,\lambda}\,x^{\lambda}\,\frac{1}{\Gamma(\beta_n-\alpha_n)}\int_0^1 u^{\alpha_n+\lambda-1}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}\,du=\sum_{\lambda=0}^{\infty} d_{n\lambda}\,x^{\lambda},$$

wo $d_{n\lambda}=\frac{\Gamma(\alpha_n+\lambda)}{\Gamma(\beta_n+\lambda)}\cdot d_{n-1,\lambda}$. Da die Voraussetzung für $n=0$ nach (33) mit $d_{0\lambda}=1$ erfüllt ist, so ergibt sich durch vollständige Induktion die für $|x|<1$ konvergente Reihe:

(34) $$f_n(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha_1+\lambda)\,\Gamma(\alpha_2+\lambda)\,\ldots\,\Gamma(\alpha_n+\lambda)}{\Gamma(\beta_1+\lambda)\,\Gamma(\beta_2+\lambda)\,\ldots\,\Gamma(\beta_n+\lambda)}\cdot x^{\lambda}.$$

Dabei ist vorauszusetzen, daß kein Parameter α_i Null oder eine ganze negative Zahl sei. $f_n(x)$ ist symmetrisch in α_i und in β_i; für $\alpha_\nu=\beta_\lambda$ geht $f_n(x)$ in eine analog gebaute Funktion $f_{n-1}(x)$ über.

Speziell folgt aus (34):

(35) $$f\left(\begin{matrix}\alpha_1\\1\end{matrix}\middle|\,x\right)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha_1+\lambda)}{\lambda!}x^{\lambda}=\Gamma(\alpha_1)\cdot(1-x)^{-\alpha_1}.$$

Daher ist nach (28): $\Phi_{11}\left(\begin{matrix}\alpha_1\\1\end{matrix}\middle|\,x\right)=f\left(\begin{matrix}\alpha_1\\1\end{matrix}\middle|\,x\right)$; hieraus ergibt sich allgemein durch Vergleich der rekursiven Definitionen (33) und (20a):

(36) $$\Phi_{n1}\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n\\1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_n\end{matrix}\middle|\,x\right)=f\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n\\1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_n\end{matrix}\middle|\,x\right).$$

Mit Rücksicht auf die Beziehung:

(36a) $$f\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n\\\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_n\end{matrix}\middle|\,x\right)=f\left(\begin{matrix}1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n\\1,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_n\end{matrix}\middle|\,x\right)$$

läßt sich die Gleichung (36) so aussprechen:

Die allgemeine Funktion $f_n(x)$ der Form (33a) genügt einer speziellen hygerg. Diff. gl. $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, in welcher ein Parameter α_i den Wert 1 hat; die spezialisierte Funktion $f_n(x)$ von der Form (36) ($\beta_1=1$) einer speziellen hyperg. Diff. gl. n^{ter} Ordnung, in welcher ein Parameter β_i den Wert 1 hat.

Hieraus folgt, daß $f_n(x)$ in der von 1 bis ∞ längs der positiven reellen Achse aufgeschnittenen x-Ebene eindeutig ist.

Die in (34) genannte Reihe für $f_n(x)$ ist bis auf einen konstanten (d. h. von x unabhängigen) Faktor mit der in (1) genannten hypergeometrischen Reihe identisch:

(37) $$f_n(x)=f_n(0)\cdot F_n(x);\qquad f_n(0)=\prod_{\rho=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_\rho)}{\Gamma(\beta_\rho)};\qquad F_n(0)=1.$$

Die Gleichung (33) läßt sich daher auch durch die folgende rekursive Definition der hypergeometrischen Funktion ersetzen [vgl. (8)]:

(38) $$F_n(x)=\frac{\Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\alpha_n)\,\Gamma(\beta_n-\alpha_n)}\int_0^1 u^{\alpha_n-1}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}\,F_{n-1}(xu)\,du,$$

(38a) $$\text{wo}\quad F_0(x)=\frac{1}{1-x};\qquad F\left(\begin{matrix}\alpha_1\\1\end{matrix}\middle|\,x\right)=(1-x)^{-\alpha_1}.$$

Durch eine Verallgemeinerung dieser rekursiven Definition sei die folgende Funktion definiert:

(39a) $$G_n(x)=G\left\{\begin{matrix}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n\\\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_n\\\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots\ \gamma_n\end{matrix}\middle|\,x\right\};\qquad G_0(x)=1;$$

(39) $$G_n(x) = \frac{\Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\alpha_n)\,\Gamma(\beta_n-\alpha_n)} \int_0^1 u^{\alpha_n-1}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}(1-xu)^{-\gamma_n} G_{n-1}(xu)\,du.$$

Hieraus ergeben sich die Beziehungen:

(40) $$G\left\{\begin{matrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ 1\end{matrix}\middle| x\right\} = F\left(\begin{matrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{matrix}\middle| x\right); \qquad G\left\{\begin{matrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{matrix}\middle| x\right\} = F\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \gamma_1\\ \beta_1, & 1\end{matrix}\middle| x\right);$$

(40a) $$G\left\{\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_n\\ \beta_1, & \beta_2, & \dots & \beta_n\\ 1, & 0, & \dots & 0\end{matrix}\middle| x\right\} = F\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_n\\ \beta_1, & \beta_2, & \dots & \beta_n\end{matrix}\middle| x\right).$$

Existiert eine für $|x|<1$ konvergente Reihenentwicklung $G_{n-1}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} e_{n-1,\lambda} x^{\lambda}$, so läßt sich der Integrand von (39) für $|x|<1$ in eine für alle u des Integrationsweges gleichmäßig konvergierende Reihe entwickeln. Daher folgt:

$$G_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\alpha_n)\,\Gamma(\beta_n-\alpha_n)} \int_0^1 u^{\alpha_n+\nu+\mu-1}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}du \,.\, (-1)^{\mu}\binom{-\gamma_n}{\mu}\, e_{n-1,\nu}\, x^{\nu+\mu}.$$

Ersetzt man den Summationsindex μ durch $\lambda-\nu$, so kommt:

$$G_n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} x^{\lambda} \frac{\Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\alpha_n)\,\Gamma(\beta_n-\alpha_n)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_n+\lambda)\,\Gamma(\beta_n-\alpha_n)}{\Gamma(\beta_n+\lambda)} \cdot \sum_{\nu=0}^{\lambda} \frac{[\gamma_n]_{\lambda-\nu}}{(\lambda-\nu)!}\, e_{n-1,\nu}.$$

Da die Existenz einer Reihenentwicklung nach (39a) für $n=0$ trivial ist, so folgt in der Tat die für $|x|<1$ konvergente Reihe mit rekursiver Definition ihrer Koeffizienten:

(41) $$G_n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} e_{n\lambda} x^{\lambda};$$

(41a) $$e_{n\lambda} = \frac{[\alpha_n]_{\lambda}}{[\beta_n]_{\lambda}} \sum_{\nu=0}^{\lambda} \frac{[\gamma_n]_{\lambda-\nu}}{(\lambda-\nu)!}\, e_{n-1,\nu}; \qquad e_{0\lambda} = \begin{cases} 1 & \lambda=0 \\ 0 & \lambda>0 \end{cases}.$$

Insbesondere ergibt sich in Übereinstimmung mit (40):

$$e_{1\lambda} = \frac{[\alpha_1]_{\lambda}\,[\gamma_1]_{\lambda}}{[\beta_1]_{\lambda}\,\lambda!}.$$

Dabei ist vorauszusetzen, daß keiner der Parameter β_i Null oder eine ganze negative Zahl sei. $G_n(x)$ besitzt keine Symmetrieeigenschaften, wohl aber die zu (36a) analoge Eigenschaft, daß sich $G_n(x)$ für $\alpha_n=\beta_n$ und $\gamma_n=0$ auf eine analog gebaute Funktion $G_{n-1}(x)$ reduziert. Außerdem ist folgende Relation beachtenswert, die man unmittelbar aus der Rekursionsformel (41a) abliest:

(42) Für $\alpha_n=\beta_n$ ist: $G_n(x)=(1-x)^{-\gamma_n}G_{n-1}(x)$.

Es sei noch bemerkt, daß die Integraldarstellungen (33), (38), (39) natürlich an die Konvergenzbedingung: $\Re(\beta_n)>\Re(\alpha_n)>0$ gebunden, die gefundenen Reihenentwicklungen aber nach dem in § 5 Gesagten von ihr unabhängig sind. Man könnte diese Bedingung auch von vorneherein vermeiden, indem man das bestimmte Integral $\int_0^1$ überall durch das Doppelumlaufintegral $\frac{1}{[1-e^{2\pi i(\beta_n-\alpha_n)}]\,[1-e^{2\pi i\alpha_n}]} \cdot \int_{U_{01}}$ ersetzt.

Mit Hilfe des neuen Funktionszeichens $G_n(x)$ läßt sich nun für die hypergeometrische Funktion n^{ter} Ordnung (mit der Spezialisierung $\beta_1 = 1$) die folgende, für $\left|\frac{x}{x-1}\right| < 1$ konvergente Entwicklung nach Potenzen von $\frac{x}{x-1}$ angeben:

(43) $$F\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \\ 1, \beta_2 \ldots \beta_n\end{matrix}\middle| x\right) = (1-x)^{-\alpha_n} G\left\{\begin{matrix}\alpha_2, & \alpha_3, & \ldots & \alpha_n \\ \beta_2, & \beta_3, & \ldots & \beta_n \\ \beta_2-\alpha_1, & \beta_3-\alpha_2, & \ldots & \beta_n-\alpha_{n-1}\end{matrix}\middle| \frac{x}{x-1}\right\}$$

(43a) $$= G\left\{\begin{matrix}\alpha_2, & \ldots & \alpha_n, & 1 \\ \beta_2, & \ldots & \beta_n, & 1 \\ \beta_2-\alpha_1, & \ldots & \beta_n-\alpha_{n-1}, & -\alpha_n\end{matrix}\middle| \frac{x}{x-1}\right\}.$$

(43a) ist eine einfache Umformung von (43) nach der Regel (42) auf Grund der Identität: $(1-x)^{-\alpha_n} = \left(1-\frac{x}{x-1}\right)^{+\alpha_n}$.

Für $n=1$ ist die Darstellung (43) nach (38a) und (39a) evident. Ist sie für $n-1$ bewiesen, so folgt aus (38):

$$F_n(x) = \frac{\Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\alpha_n)\,\Gamma(\beta_n-\alpha_n)} \int_0^1 u^{\alpha_n-1}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}(1-xu)^{-\alpha_{n-1}} G\left(\frac{xu}{xu-1}\right)du.$$

Dabei ist F_n mit der Spezialisierung $\beta_1 = 1$ und G mit den in (43) angegebenen Argumenten, abgesehen von der letzten Kolonne, zu verstehen. Man unterwerfe nun die Integrationsvariable u der Transformation: $u = \frac{v}{xv-x+1}$, also: $1-u = \frac{(1-x)(1-v)}{xv-x+1}$, $1-xu = \frac{1-x}{xv-x+1}$, $du = \frac{(1-x)\,dv}{(xv-x+1)^2}$, und forme diese Ausdrücke folgendermaßen um:

$$u = \frac{v}{(1-x)\left[1-\frac{vx}{x-1}\right]}; \quad 1-u = \frac{1-v}{1-\frac{vx}{x-1}}; \quad 1-xu = \frac{1}{1-\frac{vx}{x-1}}; \quad du = \frac{dv}{(1-x)\left[1-\frac{vx}{x-1}\right]^2}.$$

Dann nimmt obiges Integral folgende Gestalt an:

$$F_n(x) = \frac{\Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\alpha_n)\,\Gamma(\beta_n-\alpha_n)} (1-x)^{-\alpha_n} \int_0^1 v^{\alpha_n-1}(1-v)^{\beta_n-\alpha_n-1} \left(1-\frac{xv}{x-1}\right)^{-\beta_n+\alpha_{n-1}} G\left(\frac{xv}{x-1}\right)dv.$$

Hieraus folgt die Behauptung nach (39).

Es ist zu beachten, daß der Ausdruck auf der rechten Seite von (43) symmetrisch in α_i und in β_i ist, insbesondere also bei Vertauschung von α_n mit α_ν ($\nu < n$) ungeändert bleibt (wie aus den entsprechenden Symmetrieeigenschaften der hypergeometrischen Funktion auf der linken Seite von (43) folgt).

Nun können leicht die nachfolgenden Reihenentwicklungen der Funktionen $\Phi_{n\nu}(x)$, $\Psi_{n\nu}(x)$ und $\Omega_{nn}(x)$ gefunden werden. Sie stützen sich auf die rekursiven Definitionen der Integrale (20) bis (22) der ersten Gruppe mit Benutzung der daselbst angegebenen Werte für die konstanten Faktoren C_n vor dem Integralzeichen. Dagegen sollen die übrigen Definitionen der Hauptintegrale, also namentlich der zweiten Gruppe, vorerst noch ignoriert werden.

In den folgenden Gleichungen (45) und (47) sind die Argumente der G-Funktion für die Indexwerte:

$$i = \nu+1, \nu+2, \ldots n-1, n, 1, 2, \ldots \nu-2, \nu-1$$

unter Beachtung dieser Reihenfolge und mit der Festsetzung $\alpha_0 = \alpha_n$, $\beta_0 = \beta_n$ zu verstehen.

(44) $$\Phi_{n\nu}(x) = f\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_\nu, & \alpha_2+1-\beta_\nu, & \ldots \alpha_n+1-\beta_\nu \\ \beta_1+1-\beta_\nu, & \beta_2+1-\beta_\nu, & \ldots, \beta_n+1-\beta_\nu\end{matrix}\middle| x\right)$$

(45) $$= \Phi_{n\nu}(0)\cdot(1-x)^{-\alpha_{\nu-1}-1+\beta_\nu}\, G\left\{\begin{matrix}\ldots, & \alpha_i+1-\beta_\nu, & \ldots \\ \ldots & \beta_i+1-\beta_\nu, & \ldots \\ \ldots, & \beta_i-\alpha_{i-1} & , \ldots\end{matrix}\middle| \frac{x}{x-1}\right\} \quad [i \neq \nu];$$

(46) $$\Psi_{n\nu}(x) = f\left(\begin{matrix}\alpha_\nu+1-\beta_1, & \alpha_\nu+1-\beta_2, & \ldots \alpha_\nu+1-\beta_n \\ \alpha_\nu+1-\alpha_1, & \alpha_\nu+1-\alpha_2, & \ldots \alpha_\nu+1-\alpha_n\end{matrix}\middle| \frac{1}{x}\right)$$

(47) $$= \Psi_{n\nu}(\infty)\cdot\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-\alpha_\nu-1+\beta_{\nu-1}} G\left\{\begin{matrix}\ldots, & \alpha_\nu+1-\beta_i, & \ldots \\ \ldots, & \alpha_\nu+1-\alpha_i, & \ldots \\ \ldots, & \beta_{i-1}-\alpha_i, & \ldots\end{matrix}\middle| \frac{1}{1-x}\right\} \quad [i \neq \nu];$$

(48) $$\Omega_{nn}(x) = \frac{x^{1-\beta_n}}{\Gamma(\sigma_n)}\, G\left\{\begin{matrix}\sigma_1 & , & \sigma_2 & , \ldots & \sigma_{n-1} \\ \sigma_2 & , & \sigma_3 & , \ldots, & \sigma_n \\ \beta_1-\alpha_2, & & \beta_2-\alpha_3, & \ldots & \beta_{n-1}-\alpha_n\end{matrix}\middle| 1-x\right\}$$

(49) $$= \frac{x^{1-\alpha_n-\sigma_n}}{\Gamma(\sigma_n)}\, G\left\{\begin{matrix}\sigma_1 & , & \sigma_2 & , \ldots & \sigma_{n-1} \\ \sigma_2 & , & \sigma_3 & , \ldots & \sigma_n \\ \beta_2-\alpha_1, & & \beta_3-\alpha_2, & \ldots & \beta_n-\alpha_{n-1}\end{matrix}\middle| \frac{x-1}{x}\right\};$$

(50) $$\Phi_{n\nu}(0) = \prod_{\rho=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha_\rho+1-\beta_\nu)}{\Gamma(\beta_\rho+1-\beta_\nu)}; \quad \Psi_{n\nu}(\infty) = \prod_{\rho=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha_\nu+1-\beta_\rho)}{\Gamma(\alpha_\nu+1-\alpha_\rho)}; \quad \Omega_{nn}(1) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)}.$$

Die Darstellung (44) ergibt sich für $n=1$ aus der Definition (28); ist sie für $n-1$ bewiesen, so zeigt ein Vergleich der rekursiven Definitionen von $f_n(x)$ (33) und $\Phi_{n\nu}(x)$ (20a), daß $f_n(x)$ mit $\Phi_{n\nu}(x)$ identisch wird, wenn man in $f_n(x)$ die Parameter α_i, β_i $(i=1, \ldots n)$ bzw. durch $\alpha_i+1-\beta_\nu$, $\beta_i+1-\beta_\nu$ ersetzt. Damit ist (44) für $\nu = 1, \ldots n-1$ bestätigt. Vertauscht man nun β_ν mit β_λ, wo $\nu < n$, $\lambda < n$, so vertauscht sich nach (44) $\Phi_{n\nu}(x)$ mit $\Phi_{n\lambda}(x)$. Vertauscht man ferner β_ν $(\nu < n)$ mit β_n, so geht nach der ersten in (V) (S. 12) ausgesprochenen Eigenschaft der hyperg. Diff. gl. $x^{1-\beta_\nu}\Phi_{n\nu}(x)$ wieder in ein partikuläres Integral über, das für $x=0$ zum Exponenten $1-\beta_n$ gehört, also zu $x^{1-\beta_n}\Phi_{nn}(x)$ proportional ist. Die Funktion $\Phi_{nn}(x)$ soll nun durch geeignete Wahl der Konstanten $\Phi_{nn}(0)$ so normiert werden, daß der Proportionalitätsfaktor gleich 1 wird.[1] Dann gilt (44) auch für $\nu = n$.

Aus (44) ergibt sich (46) nach den Vertauschungsrelationen (IX) (S. 22); damit ist zugleich die Normierung des Integrales $x^{-\alpha_n}\Psi_{nn}(x)$ festgelegt.

Aus den bewiesenen beiden Reihenentwicklungen ergeben sich die beiden anderen (45) und (47) nach der Identität (43) [vgl. auch (37)], wobei die Stellung des Argumentes

[1] Wie später gezeigt wird [siehe (Xb) S. 34], besitzt die in den Gleichungen (23) und (24) bereits angegebene Normierung die geforderte Eigenschaft.

$\beta_\nu + 1 - \beta_\nu = 1$ zu beachten ist. Natürlich läßt diese Form zufolge der Symmetrieeigenschaften des Ausdruckes in (43) viele Modifikationen zu; insbesondere läßt sich die als Faktor auftretende Potenz mit der G-Reihe gemäß (43a) verschmelzen.

Der Ausdruck (48) endlich ist für $n=1$, also $G(1-x)=1$ mit der Definition (30) identisch; ist er für $n-1$ bewiesen, so folgt aus (22a):

$$\Omega_{nn}(x)=\frac{x^{1-\beta_n}}{\Gamma(\beta_n-\alpha_n)}\,\frac{1}{\Gamma(\sigma_{n-1})}\int_0^1 u^{\sigma_n-1-1}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}(1-[1-x]u)^{\alpha_n-\beta_n-1}G([1-x]u)\,du.$$

Dabei ist G mit den in (48) genannten Argumenten abgesehen von der letzten Kolonne zu verstehen. Hieraus ergibt sich die Behauptung zufolge der rekursiven Definition (39) [an die Stelle der dort auftretenden Parameter α_n, β_n, γ_n treten hier bzw. die Werte: σ_{n-1}, σ_n, $\beta_{n-1}-\alpha_n$].

Diese Gleichung (48) ist nun zufolge der Vertauschungsrelationen (IX) mit der nachfolgenden (49) äquivalent. Bezeichnet man nämlich die in (48) und (49) vorkommenden G-Funktionen kurz mit $G(1-x)$ und $\overline{G}(\frac{x-1}{x})$, so ist nach (48):

$(x-1)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x)=(x-1)^{\sigma_n-1}\,\frac{x^{1-\beta_n}}{\Gamma(\sigma_n)}\,G(1-x)$. Hieraus entsteht durch die in (IX) angegebenen Vertauschungen die Gleichung: $(1-x)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x)=\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\sigma_n-1}\frac{x^{-\alpha_n}}{\Gamma(\sigma_n)}\,\overline{G}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ und damit (49). — Auch in diesen beiden Darstellungen kann die als Faktor auftretende Potenz mit der G-Reihe verschmolzen werden.

Die in (50) genannten Konstanten stellen den Koeffizienten des ersten Gliedes in den betreffenden Reihenentwicklungen dar; $f_n(0)$ ist in (37) angegeben; $G_n(0)$ hat nach (41a) den Wert $e_{n0}=1$.

Die in (48) und (49) benutzten G-Reihen haben folgenden speziellen Bau:

(51)
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_n)}\,G\left\{\begin{matrix}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_{n-1}\\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_n\\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots\ \gamma_{n-1}\end{matrix}\,\middle|\,x\right\}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{g_{n-1,\lambda}}{\Gamma(\alpha_n+\lambda)}\,x^\lambda,$$

$$g_{k\lambda}=\sum_{\nu=0}^{\lambda}\frac{[\alpha_k]_{\lambda-\nu}\,[\gamma_k]_{\lambda-\nu}}{(\lambda-\nu)!}\,g_{k-1,\nu};\qquad g_{0\nu}=\begin{cases}1 & \nu=0\\ 0 & \nu>0\end{cases}.$$

Diese Darstellung ergibt sich als Umformung von (41) und (41a), wenn daselbst $\beta_k=\alpha_{k+1}$ und $e_{k\lambda}=\frac{g_{k\lambda}}{[\alpha_{k+1}]_\lambda}$ für $k=1,\ldots n-1$ gesetzt wird. Dadurch wird nämlich:

$\frac{e_{n-1,\lambda}}{\Gamma(\alpha_n)}=\frac{g_{n-1,\lambda}}{\Gamma(\alpha_n+\lambda)}$; $\quad g_{k\lambda}=[\alpha_{k+1}]_\lambda\cdot\frac{[\alpha_k]_\lambda}{[\alpha_{k+1}]_\lambda}\sum_{\nu=0}^{\lambda}\frac{[\gamma_k]_{\lambda-\nu}}{(\lambda-\nu)!}\,\frac{g_{k-1,\nu}}{[\alpha_k]_\nu}$, woraus (51) folgt. — Die Reihe (51) kann also formal aus der folgenden Reihe gebildet werden:

(51a)
$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}g_{n-1,\lambda}\,x^\lambda=\prod_{k=1}^{n-1}\left[\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{[\alpha_k]_\lambda\,[\gamma_k]_\lambda}{\lambda!}\,x^\lambda\right].$$

Aus (51) und (51a) erkennt man, daß diese spezielle G-Reihe und damit die für $\Omega_{nn}(x)$ gefundenen Reihenentwicklungen (48) und (49) für alle Parameterwerte sinnvoll bleiben — im Gegensatz zu den Reihen für $\Phi_{n\nu}(x)$ und $\Psi_{n\nu}(x)$.

Nun können auch die Symmetrieeigenschaften der Integrale formuliert werden, die der ersten in (V) (S. 12) genannten Eigenschaft der hyperg. Diff. gl. entsprechen:

(X) *Die Funktionen* $\Phi_{n\nu}(x)$, $\Psi_{n\nu}(x)$ $(\nu = 1, \ldots n)$ *und* $\Omega_{nn}(x)$ *sind in* α_i *sowie in* β_i $(i = 1, \ldots n)$ *symmetrisch mit Ausnahme des einzigen Parameters* α_ν *in* $\Psi_{n\nu}(x)$ *und* β_ν *in* $\Phi_{n\nu}(x)$. *Bei Vertauschung von* α_ν *mit* α_λ *bzw.* β_ν *mit* β_λ *vertauscht sich* $\Psi_{n\nu}(x)$ *mit* $\Psi_{n\lambda}(x)$ *bzw.* $\Phi_{n\nu}(x)$ *mit* $\Phi_{n\lambda}(x)$.

[Bezüglich $\Omega^{I}_{n\nu}(x)$, $\Omega^{II}_{n\nu}(x)$ siehe (XIII) (S. 44)].

Für $\Phi_{n\nu}(x)$ und $\Psi_{n\nu}(x)$ folgen diese Eigenschaften (soweit sie nicht schon festgestellt wurden) aus den Darstellungen (44) und (46). Ferner besitzt $(x-1)^{\sigma_n - 1}\Omega_{nn}(x)$ nach (48) eine Reihenentwicklung der Form: $(x-1)^{\sigma_n - 1}\left[\frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (x-1)^\nu\right]$. Bei Vertauschung der α_i und der β_i unter sich bleibt nach (V) $(x-1)^{\sigma_n - 1}\Omega_{nn}(x)$ ein partikuläres Integral, welches eine Reihenentwicklung der Form besitzt:

$(x-1)^{\sigma_n - 1}\left[\frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu (x-1)^\nu\right]$; folglich bleibt es hiebei ungeändert (also $a_\nu = b_\nu$).

Es sei noch bemerkt, daß nach (X) der Ausdruck auf der rechten Seite von (48) symmetrisch in α_i und in β_i ist, also insbesondere bei Vertauschung von β_n mit β_ν ungeändert bleibt; das Entsprechende gilt natürlich in (49). Damit ist eine analoge Symmetrieeigenschaft einer speziellen G-Funktion gefunden wie für den Ausdruck auf der rechten Seite in (43).

Nach der in diesem Paragraphen festgelegten Normierung der Funktionen $\Phi_{nn}(x)$ und $\Psi_{nn}(x)$ sind die Hauptintegrale der zweiten Gruppe in Abänderung der Gleichungen (23) und (24) folgenderweise zu definieren:

$$x^{1-\beta_n}\Phi_{nn}(x) = B_n x^{1-\beta_n}\int_1^\infty \ldots dt; \quad x^{-\alpha_n}\Psi_{nn}(x) = A_n x^{1-\beta_n}\int_0^1 \ldots dt.$$

(Xa) *Die konstanten Faktoren* A_n *und* B_n *sind durch die in (X) ausgesprochenen Relationen hinsichtlich der Vertauschung von* α_ν *mit* α_n *bzw.* β_ν *mit* β_n *definiert.*

Ihre Berechnung ist die Aufgabe des folgenden Paragraphen.[1]

§ 7. *Die Hauptintegrale der zweiten Gruppe.*

In diesem wie in einem späteren Paragraphen (§ 9) werden Grenzwerte bestimmter Integrale gebildet, die sich auf die gemeinsame Form bringen lassen: $\lim_{z\to 0}\int_\alpha^z \psi(z,u)\,du$, wobei $\psi(z,u)$ i. a. für $u = 0$ unstetig ist. Da das Verfahren in allen Fällen das gleiche ist, soll zur Vereinfachung der Darstellung das allgemeine Schema vorangestellt werden.

Es sei etwa angenommen, daß z vom Punkte r ab, wo r eine (kleine) positive Zahl ist, längs der positiven reellen Achse nach Null wandert; z sei also eine reelle Zahl in dem Intervall $0 \leq z \leq r$. Der Integrationsweg möge beliebig von α nach r und sodann längs der positiven reellen Achse von r nach z verlaufen. Nun sei eine beliebig kleine positive

[1] wobei sich die bereits in (23), (24) angegebene Normierung bestätigen wird; siehe (Xb), S. 34.

Zahl ρ vorgegeben. z wird auf das Gebiet $z \leqq \frac{\rho}{2}$ beschränkt und das Integral in die Summe: $\int_\alpha^\rho \psi(z,u)du + \int_\rho^z \psi(z,u)du$ zerlegt. Dabei seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

1. $\int_\alpha^z \psi(z,u)du$ ist für alle Werte z des Bereiches $0 \leqq z \leqq r$ konvergent; $\psi(z,u)$ ist stetig in u für den angegebenen Bereich von z und alle inneren Punkte des Integrationsweges.

2. $\psi(z,u)$ konvergiert mit abnehmendem z ($z \leqq \frac{\rho}{2}$) gegen $\psi(0,u)$ gleichmäßig in u innerhalb des durch den Integrationsweg $\int_\alpha^\rho \ldots du$ definierten abgeschlossenen Bereiches.

3. Es gibt eine von ρ (nicht von z) abhängige positive Zahl $G(\rho)$, so daß für jeden Wert z des Bereiches $0 \leqq z \leqq \frac{\rho}{2}$ die Abschätzung gilt: $\left| \int_\rho^z \psi(z,u)\,du \right| < G(\rho)$ und $\lim_{\rho \to 0} G(\rho) = 0$ ist.

Dann ist: $$\lim_{z \to 0} \int_\alpha^z \psi(z,u)\,du = \int_\alpha^0 \psi(0,u)du.$$

Es ist also bei Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Zahl ε die Existenz einer Zahl ϑ zu erweisen, so daß für $z < \vartheta$ die Abschätzung gilt:

$$D = \left| \int_\alpha^z \psi(z,u)\,du - \int_\alpha^0 \psi(0,u)\,du \right| < \varepsilon.$$

Da nach Voraussetzung 1. das Integral $\int_\rho^0 \psi(0,u)\,du$ konvergiert, gibt es eine Zahl ρ_1, so daß für $\rho < \rho_1$: $\left| \int_\rho^0 \psi(0,u)\,du \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ ist. Ferner gibt es nach Voraussetzung 3. eine Zahl ρ_2, so daß für $\rho < \rho_2$: $G(\rho) < \frac{\varepsilon}{3}$ ist. Nun sei $\rho_0 < \rho_1$, $\rho_0 < \rho_2$ und man nehme im Ausdruck D die Zerlegungen $\int_\alpha^z = \int_\alpha^{\rho_0} + \int_{\rho_0}^z$, $\int_\alpha^0 = \int_\alpha^{\rho_0} + \int_{\rho_0}^0$ vor. Dadurch erhält man die Abschätzung:

$$D \leqq \left| \int_\alpha^{\rho_0} \psi(z,u)\,du - \int_\alpha^{\rho_0} \psi(0,u)\,du \right| + \left| \int_{\rho_0}^z \psi(z,u)\,du \right| + \left| \int_{\rho_0}^0 \psi(0,u)\,du \right|.$$

Das dritte Glied ist kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$; das zweite nach Voraussetzung 3. für $z \leqq \frac{\rho_0}{2}$ kleiner als $G(\rho_0) < \frac{\varepsilon}{3}$. Endlich gibt es nach Voraussetzung 2. eine von u unabhängige Zahl ϑ_0, so daß für alle Werte u des Integrationsweges $\int_\alpha^{\rho_0}$ und für $z < \vartheta_0$: $|\psi(z,u) - \psi(0,u)| < \frac{\varepsilon}{3}l$ ist, wo l die Länge des Integrationsweges $\int_\alpha^{\rho_0}$ bedeuten soll.

Bezeichnet nun ϑ die kleinere der beiden Zahlen ϑ_0 und $\frac{\rho_0}{2}$, so ist für $z < \vartheta$ jedes der drei Glieder in obiger Abschätzung kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$, womit die Behauptung $D < \varepsilon$ bewiesen ist.

Das angegebene Verfahren soll zunächst zur Lösung einer Aufgabe dienen, welche sich auf das Verhalten des Integrales $x^{1-\beta_1}\Phi_{n1}(x)$ im singulären Punkt $x = 1$ bezieht. Man denke sich dieses Integral als Linearkombination der zu 1 gehörigen Hauptintegrale dargestellt. Die Eindeutigkeit der Funktionen $\Phi_{n1}(x)$ und $\Omega_{n\nu}(x)$ ($\nu = 1, \ldots n$) erfordert nach (III) (S. 12) die Verzweigungsschnitte $(1, +\infty)$ und $(0, -\infty)$; soll nun die x-Ebene nicht

längs der ganzen reellen Achse zerschnitten werden, so sind die auftretenden Potenzen mittels der gleichen Verzweigungsschnitte zu definieren, also die Potenzen $x^{1-\beta_1}$ und $(1-x)^{\sigma_n-1}$ mit den in (IV) (S. 12) getroffenen Festsetzungen zu wählen. So erhält man die Darstellung:

(52a) $$x^{1-\beta_1}\Phi_{n1}(x) = K_n(1-x)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x) + \mathfrak{P}(x-1),$$

wo $\mathfrak{P}(x-1)$ für $|x-1|<1$ eine Potenzreihe in $x-1$ vorstellt.

Die Konstante K_n läßt sich nun wegen $\Omega_{nn}(1) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)}$ [siehe (50)] unter der Voraussetzung $\Re(\sigma_n)<1$ durch den Grenzübergang bestimmen:

(52b) $$K_n = \Gamma(\sigma_n)\cdot\lim_{x\to 1}(1-x)^{1-\sigma_n}x^{1-\beta_1}\Phi_{n1}(x) \quad [\Re(\sigma_n)<1].$$

Für $\Phi_{n1}(x)$ sei die Integraldarstellung (20) benutzt nach Transformation der Integrationsvariabeln: $t = 1-\frac{1-x}{u}$, also $x-t = (1-x)\frac{1-u}{u}$ $\left[dt = \frac{1-x}{u^2}du\right]$; dann entsteht:

$$K_n = \Gamma(\sigma_n)\lim_{x\to 1}(1-x)^{1-\sigma_n}\frac{(1-x)^{\beta_n-\alpha_n}}{\Gamma(\beta_n-\alpha_n)}\int_{1-x}^{1}u^{-\beta_n+\alpha_n-1}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}\left(1-\frac{1-x}{u}\right)^{\alpha_n-\beta_1}\cdot$$

$$\cdot\,\Phi_{n-1,1}\left(1-\frac{1-x}{u}\right)du.$$

Nach Einführung der Bezeichnung $1-x = z$ ergeben sich die Umformungen:

$$z^{1-\sigma_n}z^{\beta_n-\alpha_n} = z^{1-\sigma_n-1}; \quad u^{-\beta_n+\alpha_n-1} = \frac{u^{-\sigma_n}}{u^{1-\sigma_n-1}}; \text{ also:}$$

(52c) $$K_n = \frac{\Gamma(\sigma_n)}{\Gamma(\beta_n-\alpha_n)}\lim_{z\to 0}\int_z^1 u^{-\sigma_n}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}\varphi\left(\frac{z}{u}\right)du,$$

wo: $$\varphi(v) = (1-v)^{\alpha_n-\beta_1}v^{1-\sigma_n-1}\Phi_{n-1,1}(1-v).$$

Mit Benutzung der im vorangestellten Hilfssatz eingeführten Bezeichnungen kann etwa $r = \frac{1}{2}$ gesetzt werden. Die Integrationsvariable u kann ebenso wie die Variable z als reell vorausgesetzt werden; sie sind auf die folgenden Bereiche beschränkt:

$$0 \leqq z \leqq \tfrac{\rho}{2}; \qquad z \leqq u \leqq 1; \qquad \text{daher: } 0 \leqq \frac{z}{u} \leqq 1.$$

Die verschiedenen, für die Konvergenz des Integrals und Existenz des Grenzwertes hinreichenden und miteinander verträglichen Bedingungen seien gleich in folgender Zusammenfassung vorausgestellt:

(52d) $$\Re(\sigma_n) \leqq 0; \qquad \Re(\sigma_{n-1})<1; \qquad \Re(\beta_n) > \Re(\alpha_n) \geqq \Re(\beta_1).$$

Unter diesen Bedingungen ist $\varphi(v)$ im abgeschlossenen Bereich $0 \leqq v \leqq 1$ stetig, liegt also daselbst absolut genommen unter einer festen Schranke: $|\varphi(v)|<M$. Speziell an der Stelle $v = 0$ hat $\varphi(v)$ nach (52b) und (52d) den Wert: $\varphi(0) = \frac{K_{n-1}}{\Gamma(\sigma_{n-1})}$.

Das Integral (52c) konvergiert zufolge (52d) an den Grenzen $u = 1$ und $u = z$, auch bei der Spezialisierung $z = 0$.

Im Integral $\int_{\rho}^{1}$ ist $z \leqq \frac{\rho}{2}$, $u \geqq \rho$, also $0 \leqq \frac{z}{u} \leqq \frac{1}{2}$; für diesen Bereich konvergiert $\varphi(\frac{z}{u})$ mit abnehmendem z gleichmäßig in u gegen $\varphi(0)$.

Im Integral $\int_{z}^{\rho}$ ist $u \leqq \rho$, also $|u^{-\sigma_n}| \leqq \rho^{-\Re(\sigma_n)}$ nach (52d); ferner

$$|(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}| \leqq k(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \Re(\beta_n-\alpha_n) \geqq 1 \\ (1-\rho)^{\Re(\beta_n-\alpha_n)-1} & \text{„ } \Re(\beta_n-\alpha_n) \leqq 1 \end{cases}.$$

Endlich ist die Länge des Integrationsweges $\int_{z}^{\rho}$ kleiner als ρ. Daher ergibt sich die Abschätzung: $\left|\int_{z}^{\rho} \ldots du\right| < \rho^{1-\Re(\sigma_n)}\, k(\rho)\, M.$

Da also alle Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt sind, folgt aus (52c):

$$K_n = \frac{\Gamma(\sigma_n)}{\Gamma(\beta_n-\alpha_n)} \int_0^1 u^{-\sigma_n}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}\, du. \quad \frac{K_{n-1}}{\Gamma(\sigma_{n-1})} = \frac{\Gamma(\sigma_n)\,\Gamma(1-\sigma_n)}{\Gamma(\sigma_{n-1})\,\Gamma(1-\sigma_{n-1})} K_{n-1}.$$

Vergleich von (28) und (30) ergibt für $n=1$ den Wert:

$K_1 = \Gamma(\alpha_1+1-\beta_1)\,\Gamma(\beta_1-\alpha_1) = \frac{\pi}{\sin \pi \sigma_1}$. Sonach erhält man aus der gefundenen Rekursionsformel folgenden Wert:

$$K_n = \frac{\sin \pi \sigma_{n-1}}{\sin \pi \sigma_n} K_{n-1} = \frac{\pi}{\sin \pi \sigma_n}.$$

Dieses Ergebnis gilt unabhängig von den zu seiner Herleitung getroffenen Voraussetzungen (52d). Vermöge der Vertauschungsrelationen (IX) (S. 22) und (X) (S. 29) findet man aus (52a) die beiden Gleichungen:

(52) $$x^{1-\beta_\nu}\, \Phi_{n\nu}(x) = \frac{\pi}{\sin \pi \sigma_n} (1-x)^{\sigma_n-1}\, \Omega_{nn}(x) + \mathfrak{P}_{n\nu}(x-1);$$

(53) $$x^{-\alpha_\nu}\, \Psi_{n\nu}(x) = \frac{\pi}{\sin \pi \sigma_n} (x-1)^{\sigma_n-1}\, \Omega_{nn}(x) + \mathfrak{Q}_{n\nu}(x-1);$$

[Vgl. auch im folgenden (72) und (73)!]

wo $\mathfrak{P}_{n\nu}(x-1)$ und $\mathfrak{Q}_{n\nu}(x-1)$ für $|x-1|<1$ Potenzreihen in $x-1$ vorstellen. (52) gilt in der von 0 bis $-\infty$ längs der negativen reellen Achse und 1 bis ∞ längs der positiven reellen Achse — (53) in der von 1 über 0 nach $-\infty$ längs der reellen Achse aufgeschnittenen x-Ebene mit den in (III) und (IV) (S. 12) ausgesprochenen Eindeutigkeitsfestsetzungen.

Die gefundenen Darstellungen (52) und (53) erlauben nun mittels des gleichen Verfahrens die im vorigen Paragraphen in (Xa) definierten Konstanten A_n und B_n zu berechnen. Aus (53) entnimmt man nämlich wegen $\Omega_{nn}(1) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)}$ unter der Voraussetzung $\Re(\sigma_n)<1$ den Grenzwert:

(53a) $$\lim_{x \to 1} (x-1)^{1-\sigma_n}\, x^{-\alpha_n}\, \Psi_{nn}(x) = \frac{\pi}{\sin \pi \sigma_n} \cdot \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} = \Gamma(1-\sigma_n).$$

Nimmt man nun in der Integraldarstellung von $x^{-\alpha_n}\Psi_{nn}(x)$ — Gleichung (24) mit A_n anstelle der Konstanten $\Gamma(\alpha_n+1-\beta_n)$ — die Transformation vor: $t = 1+(1-x)\frac{1-u}{u}$ $\left[dt = (x-1)\frac{du}{u^2}\right]$, so erhält man die Werte:

$(x-t)^{\beta_n-\alpha_n-1}=(x-1)^{\beta_n-\alpha_n-1}\left(\frac{1}{u}\right)^{\beta_n-\alpha_n-1}$; $(1-t)^{\sigma_n-1-1}=(x-1)^{\sigma_n-1-1}\left(\frac{1-u}{u}\right)^{\sigma_n-1-1}$

und mithin folgenden Ausdruck: $x^{-\alpha_n}\Psi_{nn}(x)=$

$$x^{1-\beta_n}(x-1)^{\sigma_n-1}A_n\int_{1-\frac{1}{x}}^{1}u^{-\sigma_n}(1-u)^{\sigma_n-1-1}\left(1+[1-x]\frac{1-u}{u}\right)^{\alpha_n-1}\Omega_{n-1,n-1}\left(1+[1-x]\frac{1-u}{u}\right)du.$$

Nach Einführung der Bezeichnung $1-\frac{1}{x}=z$, also $x=\frac{1}{1-z}$, $1-x=\frac{z}{z-1}$ ergibt sich die Umformung:

(53b) $$(x-1)^{1-\sigma_n}x^{-\alpha_n-1+\beta_n}\Psi_{nn}(x)=A_n\int_z^1 u^{-\sigma_n}(1-u)^{\sigma_n-1-1}\varphi\left(\frac{z}{1-z}\frac{1-u}{u}\right)du,$$

wo $$\varphi(v)=(1-v)^{\alpha_n-1}\Omega_{n-1,n-1}(1-v).$$

Die reellen Variabeln u und z sind auf die Bereiche beschränkt:

$0\leqq z\leqq\frac{\rho}{2}$; $z\leqq u\leqq 1$; also: $0\leqq\frac{z}{1-z}\frac{1-u}{u}\leqq 1$; denn aus $u\geqq z$ folgt $\frac{1-u}{u}\leqq\frac{1-z}{z}$.

Die verschiedenen, für die Konvergenz des Integrals und Existenz des Grenzwertes hinreichenden und miteinander verträglichen Bedingungen seien wie folgt zusammengefaßt:

(53c) $\Re(\sigma_n)\leqq 0$; $\Re(\sigma_{n-1})>0$; $\Re(\alpha_n)\geqq\Re(\beta_j)$ für $j=1,\ldots n-1$.

An der Stelle $v=1$ ist $v^{\sigma_n-1-1}\Omega_{n-1,n-1}(1-v)$ als Linearkombination der zum Nullpunkt gehörigen Hauptintegrale zu denken, also $\varphi(v)$ als Linearkombination der Funktionen: $v^{1-\sigma_n-1}(1-v)^{\alpha_n-\beta_j}\Phi_{n-1,j}(1-v)$ $[j=1, 2, \ldots n-1]$; an der Stelle $v=0$ ist

$$\varphi(0)=\Omega_{n-1,n-1}(1)=\frac{1}{\Gamma(\sigma_{n-1})}.$$

$\varphi(v)$ ist im abgeschlossenen Bereich $0\leqq v\leqq 1$ nach (53c) stetig und liegt daselbst absolut genommen unter einer festen Schranke: $|\varphi(v)|<M$.

Das Integral (53b) konvergiert nach (53c) an den Grenzen $u=1$ und $u=z$, auch bei der Spezialisierung $z=0$.

Im Integral $\int_\rho^1$ ist $z\leqq\frac{\rho}{2}$, $u\geqq\rho$, also $0\leqq\frac{z}{1-z}\frac{1-u}{u}\leqq\frac{1}{2}\frac{1-\rho}{1-\frac{\rho}{2}}<\frac{1}{2}$; für diesen Bereich konvergiert $\varphi\left(\frac{z}{1-z}\frac{1-u}{u}\right)$ mit abnehmendem z gleichmäßig in u gegen $\varphi(0)$.

Für das Integral $\int_z^\rho$ ergibt sich ebenso wie im vorigen Fall die Abschätzung:

$$\left|\int_z^\rho\ldots du\right|<\rho^{1-\Re(\sigma_n)}\,k(\rho)\,M,\quad\text{wobei}\quad k(\rho)=\begin{cases}1 & \text{falls } \Re(\sigma_{n-1})\geqq 1\\ (1-\rho)^{\Re(\sigma_{n-1})-1} & \text{„ } \Re(\sigma_{n-1})\leqq 1\end{cases}.$$

Da also alle Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt sind, folgt aus (53b):

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^{1-\sigma_n}\Psi_{nn}(x)=A_n\int_0^1 u^{-\sigma_n}(1-u)^{\sigma_n-1-1}du.\frac{1}{\Gamma(\sigma_{n-1})}=A_n\frac{\Gamma(1-\sigma_n)}{\Gamma(\alpha_n+1-\beta_n)}.$$

Der Vergleich mit (53a) ergibt: $A_n=\Gamma(\alpha_n+1-\beta_n)$.

(Xb) *Damit ist die Gleichung* (24) *mit dem daselbst angegebenen Wert für die Konstante* A_n *bestätigt; vermöge der Vertauschungsrelationen* (IX) (S. 22) *folgt aus ihr die Gleichung* (23) *mit* $B_n = A_n = \Gamma(\alpha_n + 1 - \beta_n)$.

§ 8. Die Hauptintegrale der dritten Gruppe.

Die Integraldarstellungen (25) bis (27) der am Einheitspunkt regulären Hauptintegrale lassen sich in die Form zusammenfassen:

$$\textbf{(54)} \qquad \Omega_n(x) = C\,\Gamma(\alpha_n + 1 - \beta_n)\, x^{1-\beta_n} \int_{-\infty}^{0} (-t)^{\alpha_n - 1} (x-t)^{\beta_n - \alpha_n - 1} J_{n-1}(t)\, dt,$$

wo C bzw. den Wert 1, $e^{\pm \pi i (1-\beta_\nu)}$, $e^{\mp \pi i \alpha_\nu}$ $(\nu < n)$ hat.

Da das Integral $\int_{-\infty}^{0} \ldots dt$ eine um $x = 1$ reguläre Funktion von x definiert, läßt es sich in eine Taylor-Reihe um diesen Punkt entwickeln. So kommt:

$$\textbf{(55)} \quad \Omega_n(x) = x^{1-\beta_n} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (1-x)^\lambda\, C\, \frac{\Gamma(\alpha_n + 1 - \beta_n + \lambda)}{\lambda!} \int_{-\infty}^{0} (-t)^{\alpha_n - 1} (1-t)^{\beta_n - \alpha_n - \lambda - 1} J_{n-1}(t)\, dt.$$

Diese Reihe kann mit Hilfe des in (54) definierten Symboles $\Omega_n(x)$ in folgender Form geschrieben werden, wobei zu beachten ist, daß C und $J_{n-1}(t)$ nicht von β_n abhängen:

$$\textbf{(56)} \quad \Omega_n\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n \\ \beta_1, \ldots \beta_{n-1}, \beta_n\end{matrix} \middle| x\right) = x^{1-\beta_n} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda!}\, \Omega_n\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n \\ \beta_1, \ldots \beta_{n-1}, \beta_n - \lambda\end{matrix} \middle| 1\right) \cdot (1-x)^\lambda .$$

Nach den Vertauschungsrelationen (IX) (S. 22) erhält man hieraus eine analoge, nach Potenzen von $\frac{x-1}{x}$ fortschreitende Reihenentwicklung für die verschiedenen Hauptintegrale der dritten Gruppe.

Da diese Hauptintegrale nicht bezüglich aller Parameter α_i und β_i symmetrisch sind, kann man aus ihnen zufolge der ersten in (V) (S. 12) genannten Eigenschaft der hyperg. Diff. gl. durch geeignete Vertauschungen von Parametern noch weitere, am Einheitspunkt reguläre Integrale gewinnen. So existieren n Systeme von je $n-1$ Integralen des Typus $\Omega^{I}_{n\nu}(x)$, die man erhält, wenn man in $\Omega^{I}_{n\nu}(x)$ β_n mit β_k vertauscht, den Index ν die Werte $1, \ldots k-1, k+1, \ldots n$ durchlaufen läßt und $k = 1, 2, \ldots n$ wählt. Bei Vertauschung von α_n mit α_k hingegen bleibt $\Omega^{I}_{n\nu}(x)$ ungeändert, wie sich später herausstellen wird [siehe (XIII) S. 44]. Das Analoge gilt für $\Omega^{II}_{n\nu}(x)$.

Die Frage, ob die in (56) zusammengefaßten Reihenentwicklungen eine ähnliche geschlossene und einfache Darstellung ihrer Koeffizienten zulassen wie die Reihenentwicklungen (44) bis (49) des § 6, führt zur Untersuchung des Funktionswertes der Hauptintegrale am Einheitspunkt.

Nach (52) und (53) existieren die Funktionswerte $\Phi_{n\nu}(1) = \mathfrak{P}_{n\nu}(0)$ und $\Psi_{n\nu}(1) = \mathfrak{Q}_{n\nu}(0)$ unter der Voraussetzung $\Re(\sigma_n) > 1$; und zwar lassen sie sich nach dem folgenden Satz durch die Reihenentwicklungen (44) und (46) selbst darstellen:

(XI) *Die Reihe* $f_n(x)$ (34) *konvergiert für* $\Re(\sigma_n) > 1$ *in allen Punkten des Konvergenzkreises* $|x| = 1$ *absolut; für* $0 < \Re(\sigma_n) \leq 1$ *in allen Punkten dieses Kreises mit Ausnahme von* $x = 1$ *bedingt.*

Dieser in der Literatur schon mehrfach ausgesprochene Satz [meist mit der Spezialisierung $\beta_n = 1$][1] ergibt sich unmittelbar aus dem Weierstraß'schen Kriterium, nach dem das Verhalten der Potenzreihe $\sum_{\lambda=0}^{\infty} u_\lambda x^\lambda \left[\lim_{\lambda\to\infty} \frac{u_{\lambda+1}}{u_\lambda} = 1\right]$ auf dem Konvergenzkreis $|x|=1$ von dem Grenzwert $a_1 = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda \left[\frac{u_{\lambda+1}}{u_\lambda} - 1\right]$ abhängt.[2] Im vorliegenden Fall ist:

$$\frac{u_{\lambda+1}}{u_\lambda} = \prod_{\rho=1}^{n} \frac{\alpha_\rho+\lambda}{\beta_\rho+\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{u_{\lambda+1}}{u_\lambda} - 1 = \frac{\Pi\left(\frac{\alpha_\rho}{\lambda}+1\right) - \Pi\left(\frac{\beta_\rho}{\lambda}+1\right)}{\Pi\left(\frac{\beta_\rho}{\lambda}+1\right)} = \frac{-\frac{\sigma_n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\left[\cdots\right]}{\Pi\left(\frac{\beta_\rho}{\lambda}+1\right)}$$

also: $a_1 = -\sigma_n$.

Es wäre nun naheliegend zu versuchen durch eine ähnliche Methode des Grenzüberganges wie im vorigen Paragraphen die Funktionswerte $\Phi_{n\nu}(1)$ und $\Psi_{n\nu}(1)$ $[\Re(\sigma_n) > 1]$ aus den Integraldarstellungen (20) und (21) oder (23) und (24) zu berechnen; desgleichen die Funktionswerte $\Omega_{n\nu}(1)$, $\Omega^{I}_{n\nu}(1)$, $\Omega^{II}_{n\nu}(1)$ aus den Integraldarstellungen (25), (26), (27). Doch scheitern alle diese Versuche daran, daß die Konvergenz der betreffenden Integrale und die Existenz der hiebei nötigen Grenzwerte für allgemeines n widerspruchsvolle Bedingungen voraussetzen.

Im Spezialfalle $n = 2$ dagegen lassen sich diese Konstanten ohne Mühe unmittelbar aus den Integraldarstellungen berechnen (vgl. auch § 13). Insbesondere ergibt sich für die Funktion $f_2(x)$ unter der Voraussetzung $\Re(\sigma_2) > 1$ aus der Integraldarstellung (33) [vgl. auch (35)]:

$$\textbf{(57)} \quad f\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2 \\ 1, \beta_2\end{matrix}\middle| 1\right) = \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\beta_2-\alpha_2)} \int_0^1 u^{\alpha_2-1}(1-u)^{\beta_2-\alpha_2-\alpha_1-1}\, du = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta_2-\alpha_1-\alpha_2)}{\Gamma(\beta_2-\alpha_2)\Gamma(\beta_2-\alpha_1)}.$$

Durch die Spezialisierung $\alpha_1 = 1$ gewinnt man hieraus:

$$\textbf{(57a)} \quad f\left(\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}\middle| 1\right) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha-1)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-1)} \quad [\Re(\beta-\alpha) > 1].$$

Für die hypergeometrische Funktion $F_2(x)$ nimmt nach (37) die Gleichung (57) die bekannte Gestalt an:

$$\textbf{(57b)} \quad F\left(\begin{matrix}\alpha, \beta \\ 1, \gamma\end{matrix}\middle| 1\right) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \quad [\Re(\gamma-\alpha-\beta) > 0].$$

Mellin (L.7) hat nun bewiesen, daß die naheliegende Vermutung über eine entsprechende Darstellung des Funktionswertes $f_n(1)$ nicht zutrifft. Es stellt sich nämlich heraus, daß $f_n(1)$ für $n \geq 2$ (im Spezialfall $\beta_1 = 1$ für $n > 2$) sich im allgemeinen[3] nicht als eine endliche Summe von Ausdrücken der folgenden Gestalt darstellen läßt:

$$\prod_{\rho=1}^{n}\left(p_\rho^{\alpha_\rho}\, q_\rho^{\beta_\rho}\right) \cdot \frac{\Gamma(L_1)\Gamma(L_2)\ldots\Gamma(L_r)}{\Gamma(l_1)\Gamma(l_2)\ldots\Gamma(l_s)} \cdot P\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \\ \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n\end{matrix}\right).$$

---

[1] Vgl. Goursat, L.4 oder R. Weth, Bericht der Realschule zu Basel 1898—99.

[2] Weierstraß, „Über die Theorie der analytischen Fakultäten", J. f. Math. 51; abgedruckt in den Abhandlungen zur Funktionentheorie.— Das genannte Kriterium findet sich unter Ziffer 5 (VII) [Abh. p. 219 f.], wobei $\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots$ und $a_1 = g + hi$ geschrieben ist.

[3] d. h. für allgemeine Werte der Parameter α_i, β_i.

Dabei bedeuten L_ν und l_ν lineare Funktionen der Parameter von der Form $\sum_{i=1}^{n}(a_i\alpha_i+b_i\beta_i)+\gamma$, a_i und b_i ganze Zahlen, p_ρ, q_ρ, γ beliebige Konstante und P eine Konstante oder eine beliebige Funktion der Parameter von der Eigenschaft:

$$P\begin{pmatrix}\alpha_1+1,\alpha_2+1,\ldots\alpha+1\\ \beta_1+1,\beta_2+1,\ldots\beta_n+1\end{pmatrix}=\pm P\begin{pmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n\\ \beta_1,\beta_2,\ldots\beta_n\end{pmatrix}.$$

Damit ist die Unmöglichkeit einer solchen Darstellung natürlich auch für die Funktionswerte $\Phi_{n\nu}(1)$ und $\Psi_{n\nu}(1)$ für $n>2$ bewiesen. Durch eine Erweiterung des von Mellin eingeschlagenen Verfahrens läßt sich das gleiche für die Funktionswerte $\Omega_{n\nu}(1)$, $\Omega^{I}_{n\nu}(1)$, $\Omega^{II}_{n\nu}(1)$ $(\nu=1,2,\ldots n-1)$ zeigen und damit nach (56) auch für die Koeffizienten in den Reihenentwicklungen der am Einheitspunkt regulären Hauptintegrale nach Potenzen von $(1-x)$ und $\frac{x-1}{x}$. Doch soll auf diesen Beweis[1] wegen des geringen Interesses, welches das Ergebnis hat, hier nicht weiter eingegangen werden.

Selbstverständlich lassen sich auch solche um 1 reguläre Integrale der hygerg. Diff. gl. finden, deren Koeffizienten rationale Funktionen der Parameter sind. Integriert man nämlich die Differentialgleichung (3) durch den Reihenansatz $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda(x-1)^\lambda$, so erhält man für die Koeffizienten a_λ eine Rekursionsformel, welche im allgemeinen $n+1$ und bei der Spezialisierung $\beta_n=1$ noch n aufeinanderfolgende Koeffizienten enthält; davon können $n-1$ — und zwar, wenn σ_n keine ganze Zahl ist, stets die $n-1$ ersten — willkürlich vorgeschrieben werden.[2] Doch sind die so bestimmten Reihen praktisch nicht brauchbar, da bei dem komplizierten Bau der Rekursionsformel die Berechnung ihrer Koeffizienten, vor allem aber der Koeffizienten der zugehörigen Übergangssubstitutionen (vgl. § 10) praktisch undurchführbar ist.

Drittes Kapitel.

Übergangssubstitutionen zwischen den Fundamentalsystemen.

§ 9. Übergangssubstitutionen zwischen den Fundamentalsystemen um 0 und ∞.

Es seien im folgenden bei Benützung eines Fundamentalsystems von Integralen stets jene Sonderwerte für die Parameter ausgeschlossen, für welche die betreffenden n Integrale kein Fundamentalsystem mehr bilden; die Untersuchung dieser Sonderfälle wird für später vorbehalten (siehe §§11, 12).

Aus technischen Gründen soll zunächst von der Aufgabe des folgenden Paragraphen ein Teil antizipiert werden, nämlich das zum Einheitspunkt gehörige und daselbst mehrdeutige Hauptintegral in den zu 0 und ∞ gehörigen Fundamentalsystemen auszudrücken. Diese Darstellungen haben folgende Form:

(58) $$(1-x)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}b_{n\nu}x^{1-\beta_\nu}\Phi_{n\nu}(x);$$

(59) $$(x-1)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}a_{n\nu}x^{-\alpha_\nu}\Psi_{n\nu}(x).$$

[1] Dieser Beweis wurde mit Erlaubnis der Philosophischen Fakultät II. Sektion bei Drucklegung gestrichen.

[2] Vgl. Pochhammer, „Über einfache singuläre Punkte linearer Differentialgleichungen", J. f. Math. 73. p. 70.

Gemäß den Eindeutigkeitsfestsetzungen (III) und (IV) (S. 12) gelten sie in der ganzen aufgeschnittenen x-Ebene und zwar sind für (58) die Schnitte $(0, -\infty)$ und $(1, +\infty)$, für (59) die Schnitte $(0, -\infty)$ und $(0, 1)$ anzubringen.

Aus den Vertauschungsrelationen (IX) (S. 22) und (X) (S. 29) der hier vorkommenden Funktionen folgen analoge Relationen für die Koeffizienten $a_{n\nu}$ und $b_{n\nu}$, nämlich:

(XII) *$a_{n\nu}$ und $b_{n\nu}$ sind symmetrisch in den α_i und den β_i $(i=1, \ldots n)$ mit einziger Ausnahme des Parameters α_ν bei $a_{n\nu}$ und β_ν bei $b_{n\nu}$. Bei Vertauschung von α_ν mit α_λ bzw. β_ν mit β_λ vertauscht sich $a_{n\nu}$ mit $a_{n\lambda}$ bzw. $b_{n\nu}$ mit $b_{n\lambda}$. Vertauscht man α_i mit $1-\beta_i$ $(i=1, \ldots n)$, so vertauscht sich $a_{n\nu}$ mit $b_{n\nu}$ $(\nu=1, \ldots n)$.*

Zur Berechnung der Koeffizienten $b_{n\nu}$ sei angenommen, daß unter den Parametern β_i ein von β_n verschiedener β_k mit größtem Realteil existiere. Multipliziert man nun die Gleichung (58) mit $x^{\beta_k - 1}$ und läßt x gegen Null gehen, so erhält man:

$$\textbf{(58a)} \qquad b_{nk}\,\Phi_{nk}(0) = \pi \lim_{x \to 0} x^{\beta_k - 1}(1-x)^{\sigma_n - 1}\Omega_{nn}(x).$$

Für $\Omega_{nn}(x)$ benützt man die Integraldarstellung (22.2) mit der Transformation $t = \frac{x}{u}$ der Integrationsvariabeln:

$$(1-x)^{\sigma_n - 1}\Omega_{nn}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta_n - \alpha_n)} \int_x^1 u^{-\beta_n}(1-u)^{\beta_n - \alpha_n - 1}\left(1 - \frac{x}{u}\right)^{\sigma_{n-1} - 1}\Omega_{n-1,\,n-1}\left(\frac{x}{u}\right)du.$$

Setzt man diesen Ausdruck in (58a) ein und wendet dabei im Integranden auf

$\left(1 - \frac{x}{u}\right)^{\sigma_{n-1} - 1}\Omega_{n-1,\,n-1}\left(\frac{x}{u}\right)$ die Darstellung (58) an, so kommt:

$$\textbf{(58b)} \qquad b_{nk}\Phi_{nk}(0) = \sum_{\nu=1}^{n-1} b_{n-1,\nu} \lim_{x \to 0} \frac{x^{\beta_k - \beta_\nu}}{\Gamma(\beta_n - \alpha_n)} \int_x^1 u^{\beta_\nu - \beta_n - 1}(1-u)^{\beta_n - \alpha_n - 1}\Phi_{n-1,\nu}\left(\frac{x}{u}\right)du.$$

Die auf der rechten Seite auftretenden Grenzwerte werden nach der in § 7 gegebenen Regel bestimmt. Die Variabeln x und u sind auf reelle Werte in den folgenden Bereichen zu beschränken:

$$0 \leqq x \leqq \frac{\rho}{2}; \quad x \leqq u \leqq 1; \quad \text{daher: } 0 \leqq \frac{x}{u} \leqq 1.$$

Die verschiedenen mit einander verträglichen Bedingungen seien in die folgenden zusammengefaßt:

$$\textbf{(58c)} \qquad \begin{cases} \Re(\alpha_n) < \Re(\beta_n) \leqq -1 + \Re(\beta_\nu) & [\nu = 1, \ldots n-1]; \quad \Re(\sigma_{n-1}) \geqq 1; \\ \Re(\beta_k) > \Re(\beta_j) & [j = 1, \ldots k-1,\ k+1, \ldots n-1]. \end{cases}$$

In der letzten Bedingung wurde der Wert $j = n$ nicht mitgezählt, da schon aus der ersten Bedingung folgt: $\Re(\beta_k) \geqq 1 + \Re(\beta_n)$.

Unter diesen Bedingungen ist $\Phi_{n-1,\nu}\left(\frac{x}{u}\right)$ im abgeschlossenen Bereich $0 \leqq \frac{x}{u} \leqq 1$ stetig, liegt also absolut genommen unter einer festen Schranke: $\left|\Phi_{n-1,\nu}\left(\frac{x}{u}\right)\right| < M$. [An der Stelle

$\nu=1$ denke man sich $\Phi_{n-1,\nu}(v)$ gemäß (52) als Linearkombination der beiden Funktionen $v^{\beta_\nu-1}(1-v)^{\sigma_{n-1}-1}\Omega_{n-1,n-1}(v)$ und $v^{\beta_\nu-1}\mathfrak{P}_{n\nu}(v-1)]$.

Das in (58b) auftretende Integral konvergiert zufolge (58c) an den Grenzen $u=1$ und $u=x$, auch bei der Spezialisierung $x=0$.

Im Integral $\int^1_\rho$ ist $x\leqq\frac{\rho}{2}$, $u\geqq\rho$, also $0\leqq\frac{x}{u}\leqq\frac{1}{2}$; für diesen Bereich konvergiert $\Phi_{n-1,\nu}\left(\frac{x}{u}\right)$ mit abnehmendem x gleichmäßig in u gegen $\Phi_{n-1,\nu}(0)$.

Im Integral $\int^\rho_x$ ist $u\leqq\rho$, also $\left|u^{\beta_\nu-\beta_n-1}\right|\leqq\rho^{\Re(\beta_\nu-\beta_n)-1}$ nach (58c); ferner $\left|(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}\right|\leqq k(\rho)$, wo $k(\rho)=1$ oder $=(1-\rho)^{\Re(\beta_n-\alpha_n)-1}$ ist, je nachdem $\Re(\beta_n-\alpha_n)\geqq 1$ oder $\leqq 1$ ist. Daher ergibt sich die Abschätzung: $\left|\int^\rho_x \ldots du\right|<\rho^{\Re(\beta_\nu-\beta_n)}\,k(\rho)M$.

Da also nach dem Hilfssatz des § 7 alle Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0}\int^1_x \ldots du$ auf der rechten Seite von (58b) existieren, so verschwinden in der Summe $\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}$ alle Glieder außer für $\nu=k$ und es folgt:

$$b_{nk}\Phi_{nk}(0)=b_{n-1,k}\Phi_{n-1,k}(0)\frac{1}{\Gamma(\beta_n-\alpha_n)}\int_0^1 u^{\beta_k-\beta_n-1}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}\,du;$$

also nach (50):

$$\textbf{(58d)}\qquad b_{nk}=b_{n-1,k}\frac{\Gamma(\beta_n+1-\beta_k)}{\Gamma(\alpha_n+1-\beta_k)}\cdot\frac{\Gamma(\beta_k-\beta_n)}{\Gamma(\beta_k-\alpha_n)}=b_{n-1,k}\frac{\sin\pi(\beta_k-\alpha_n)}{\sin\pi(\beta_k-\beta_n)}.$$

Für $n=1$ liefert der Vergleich von (28) und (30) den Wert:

$\frac{1}{\pi}b_{11}=\frac{1}{\Gamma(\beta_1-\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_1+1-\beta_1)}$, also: $b_{11}=\sin\pi(\beta_1-\alpha_1)$. Daher folgt aus (58d):

$$b_{n1}=b_{n-1,1}\frac{\sin\pi(\beta_1-\alpha_n)}{\sin\pi(\beta_1-\beta_n)}=\frac{\prod\limits_{\rho=1}^{n}\sin\pi(\beta_1-\alpha_\rho)}{\prod\limits_{\rho=2}^{n}\sin\pi(\beta_1-\beta_\rho)}.$$

Hieraus ergeben sich nach den Vertauschungsrelationen (XII) die folgenden [von den Bedingungen (58c) unabhängigen] Werte der Konstanten:

$$\textbf{(60)}\qquad a_{n\nu}=\frac{\prod\limits_{\rho=1}^{n}\sin\pi(\beta_\rho-\alpha_\nu)}{\prod\limits_{\rho=1}^{n}{}'\sin\pi(\alpha_\rho-\alpha_\nu)};\qquad b_{n\nu}=\frac{\prod\limits_{\rho=1}^{n}\sin\pi(\beta_\nu-\alpha_\rho)}{\prod\limits_{\rho=1}^{n}{}'\sin\pi(\beta_\nu-\beta_\rho)}.$$

Dabei bedeutet [nach einer von Rajewski (L. 8) eingeführten Bezeichnung] das Symbol $\prod\limits_{\rho=1}^{n}{}'p_\rho$ das Produkt der Ausdrücke p_ρ mit einziger Ausnahme des Faktors p_ν.

Mit Hilfe dieser Ausdrücke (60) lassen sich nun alle übrigen Übergangssubstitutionen bequem darstellen, insbesondere die Übergangssubstitutionen zwischen den beiden Fundamentalsystemen um 0 und ∞. Diese sind sinnvoll, da die zu 0 und ∞ gehörigen Hauptintegrale nicht nur durch ihre Reihenentwicklungen in x und $\frac{1}{x}$, sondern als analytische Funk-

tionen in der ganzen, geeignet aufgeschnittenen x-Ebene definiert wurden. Insbesondere wurden für sie Reihenentwicklungen in $\frac{x}{x-1}$ bzw. $\frac{1}{1-x}$ [siehe (45) und (47)] aufgestellt, welche als gemeinsames Konvergenzgebiet die Halbebene $\Re(x)<\frac{1}{2}$ mit Ausschluß des dem Kreise $|x-1|\leqq 1$ angehörigen Segmentes besitzen.

Zur eindeutigen Definition der Funktionen $\Phi_{n\nu}(x)$ uud $\Psi_{n\nu}(x)$ ist nach (III) (S. 12) die x-Ebene längs der positiven reellen Achse von 0 bis ∞ aufzuschneiden; soll sie nicht längs der ganzen reellen Achse zerschnitten werden, so ist für die Potenzen von x die Form $(-x)^\rho$ in dem in (IV) (S. 12) definierten Sinn zu wählen. So erhält man die Gleichung:

(61a) $$(-x)^{1-\beta_\lambda}\Phi_{n\lambda}(x)=\sum_{\nu=1}^{n} c_{n\lambda\nu}(-x)^{-\alpha_\nu}\Psi_{n\nu}(x).$$

Unter der Annahme, daß es unter den Parametern α_ν einen von α_n verschiedenen α_k mit kleinstem Realteil gibt, erhält man analog wie in der vorigen Untersuchung den Grenzwert:

(61b) $$\Psi_{nk}(\infty)c_{n\lambda k}=\lim_{x\to-\infty}(-x)^{\alpha_k+1-\beta_\lambda}\Phi_{n\lambda}(x).$$

Für $\Phi_{n\lambda}(x)$ benutzt man mit der Einschränkung $\lambda<n$ die Integraldarstellung (20a), wobei im Integranden auf $\Phi_{n-1,\lambda}(xu)$ die Darstellung (61a) angewandt werde:

$$\Phi_{n\lambda}(x)=\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{c_{n-1,\lambda,\nu}}{\Gamma(\beta_n-\alpha_n)}\int_0^1 u^{\alpha_n-\beta_\lambda}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}(-xu)^{\beta_\lambda-\alpha_\nu-1}\Psi_{n-1,\nu}(xu)du.$$

Hiernach lautet die Gleichung (61b):

(61c) $$\Psi_{nk}(\infty)\,c_{n\lambda k}=\sum_{\nu=1}^{n-1}c_{n-1,\lambda,\nu}\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)^{\alpha_k-\alpha_\nu}}{\Gamma(\beta_n-\alpha_n)}\int_0^1 u^{\alpha_n-\alpha_\nu-1}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}\Psi_{n-1,\nu}(xu)\,du.$$

Zur Bestimmung des Grenzwertes:

(61d) $$\lim_{z\to-0}\int_0^1 u^{\alpha_n-\alpha_\nu-1}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}\Psi_{n-1,\nu}\left(\frac{u}{z}\right)du,$$

wo $x=\frac{1}{z}$ geschrieben wurde, sind nun im Hilfssatz des §7 einige Abänderungen vorzunehmen.

Der Punkt z wandere von $z=-\frac{1}{2}$ längs der negativen reellen Achse gegen Null. u und z sind also auf reelle Werte in den Bereichen $0\leqq u\leqq 1$ und $-\frac{1}{2}\leqq z\leqq 0$ zu beschränken; $t=\frac{u}{z}$ nimmt daher nur negative reelle Werte einschließlich Null an.

Die verschiedenen mit einander verträglichen Bedingungen seien gleich in die folgenden zusammengefaßt:

(61e) $$\begin{cases}\Re(\beta_n)>\Re(\alpha_n)\geqq 1+\Re(\alpha_\nu)\ [\nu=1,\ldots n-1];\ \Re(\alpha_k)\geqq -1+\Re(\beta_j)\ [j=1,\ldots n-1];\\ \Re(\alpha_k)<\Re(\alpha_j)\ [j=1,\ldots k-1,\ k+1,\ldots n-1].\end{cases}$$

In der letzten Bedingung wurde der Wert $j=n$ nicht mitgezählt, da schon aus der ersten Bedingung folgt: $\Re(\alpha_k)\leqq -1+\Re(\alpha_n)$.

Unter diesen Bedingungen ist $\Psi_{n-1,\nu}(t)$ für alle negativen reellen Werte t einschließlich $t=0$ und $t=\infty$ stetig und liegt daher für diesen Bereich absolut genommen unter einer

festen Schranke: $|\Psi_{n-1,\nu}(t)|<M$; an der Stelle $t=0$ ist nämlich $\Psi_{n-1,\nu}(t)$ als Linearkombination der $n-1$ Funktionen $t^{\alpha_\nu+1-\beta_j}\,\Phi_{n-1,j}(t)$ $[j=1,..n-1]$ zu denken, wobei nach (61e) $\Re(\alpha_\nu)\geqq\Re(\alpha_k)\geqq-1+\Re(\beta_j)$ ist.

Das Integral (61d) konvergiert zufolge (61e) an den Grenzen $u=0$ und $u=1$ (auch bei der Spezialisierung $z=0$).

Nun wird nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Zahl ρ die Zerlegung vorgenommen: $\int_0^1 = \int_0^\rho + \int_\rho^1$ und z auf den Bereich $-\frac{1}{2}\leqq z\leqq 0$ beschränkt.

Im Integral $\int_\rho^1$ ist daher $\frac{u}{z}$ eine negative reelle Zahl $\leqq -\frac{2}{\rho}$; für diesen Bereich konvergiert $\Psi_{n-1,\nu}\left(\frac{u}{z}\right)$ mit $z\to 0$ gleichmäßig in u gegen $\Psi_{n-1,\nu}(\infty)$.

Im Integral $\int_0^\rho$ ist $u\leqq\rho$, also $|u^{\alpha_n-\alpha_\nu-1}|\leqq\rho^{\Re(\alpha_n-\alpha_\nu)-1}$ nach (61e); ferner $|(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}|\leqq k(\rho)$ mit der gleichen Bedeutung dieses Symboles wie im vorigen Fall. Daher ergibt sich die Abschätzung: $|\int_0^\rho .. du|<\rho^{\Re(\alpha_n-\alpha_\nu)}\,k(\rho)\,M$.

Nun läßt sich die analoge Abschätzung wie im Beweis des genannten Hilfssatzes für $D=|\int_\alpha^0 \psi(z,u)\,du-\int_\alpha^0 \psi(0,u)\,du|$ vornehmen und es bleiben alle Schlüsse unverändert gültig, wenn stets die obere Grenze z durch 0 ersetzt wird. Damit ist die Existenz des Grenzwertes (61d) gesichert und es folgt aus (61c):

$$\Psi_{nk}(\infty)\,c_{n\lambda k}=c_{n-1,\lambda,k}\,\Psi_{n-1,k}(\infty)\,\frac{1}{\Gamma(\beta_n-\alpha_n)}\int_0^1 u^{\alpha_n-\alpha_k-1}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}\,du,$$

also nach (50) (mit den Beschränkungen $\lambda<n$, $k<n$):

$$\textbf{(61f)}\qquad c_{n\lambda k}=c_{n-1,\lambda,k}\,\frac{\Gamma(\alpha_k+1-\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_k+1-\beta_n)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha_n-\alpha_k)}{\Gamma(\beta_n-\alpha_k)}=c_{n-1,\lambda,k}\,\frac{\sin\pi(\beta_n-\alpha_k)}{\sin\pi(\alpha_n-\alpha_k)}.$$

Für $n=1$ schließt man aus den Definitionen (28) und (29):

$$(-x)^{-\alpha_1}\Psi_{11}(x)=\Gamma(\alpha_1+1-\beta_1)(-x)^{-\alpha_1}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\beta_1-\alpha_1-1}$$

$$=\Gamma(\alpha_1+1-\beta_1)(-x)^{-\alpha_1}\left(\frac{1-x}{-x}\right)^{\beta_1-\alpha_1-1}=(-x)^{1-\beta_1}\Phi_{11}(x);\quad\text{also } c_{111}=1.$$

Daher folgt aus (61f) mit Benutzung der Definition (60):

$$c_{n\,11}=c_{n-1,1,1}\frac{\sin\pi(\beta_n-\alpha_1)}{\sin\pi(\alpha_n-\alpha_1)}=\prod_{\rho=2}^{n}\frac{\sin\pi(\beta_\rho-\alpha_1)}{\sin\pi(\alpha_\rho-\alpha_1)}=\frac{a_{n1}}{\sin\pi(\beta_1-\alpha_1)}.$$

Auf Grund der Vertauschungsrelationen (IX) (S. 22), (X) (S. 29), (XII) (S. 37) erhält man hiernach die folgenden [von den Bedingungen (61e) unabhängigen] Darstellungen:

$$\textbf{(61)}\qquad (-x)^{1-\beta_\lambda}\Phi_{n\lambda}(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_{n\nu}}{\sin\pi(\beta_\lambda-\alpha_\nu)}(-x)^{-\alpha_\nu}\Psi_{n\nu}(x);$$

$$\textbf{(62)}\qquad (-x)^{-\alpha_\lambda}\Psi_{n\lambda}(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{b_{n\nu}}{\sin\pi(\beta_\nu-\alpha_\lambda)}(-x)^{1-\beta_\nu}\Phi_{n\nu}(x).$$

Man beachte, daß in diesen Darstellungen die Ausdrücke $\sin\pi(\beta_\lambda-\alpha_\nu)$ und $\sin\pi(\beta_\nu-\alpha_\lambda)$ nur scheinbar im Nenner stehen, in Wahrheit sich aber gegen einen gleichen Faktor in $a_{n\nu}$ bzw. $b_{n\nu}$ wegheben.

Aus den gefundenen Übergangssubstitutionen lassen sich mehrere Relationen zwischen den Ausdrücken $a_{n\nu}$ und $b_{n\nu}$ herleiten. Sie stellen identische Umformungen trigonometrischer Funktionen dar, die sich jedoch auf direktem Wege nur schwer beweisen lassen.

Setzt man für die Hauptintegrale auf der rechten Seite von (58) und (59) die in (52) bzw. (53) angegebene Darstellung ein, so erhält man die folgenden Identitäten:

$$(1-x)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n} b_{n\nu}\left[\frac{\pi}{\sin\pi\sigma_n}(1-x)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x)+\mathfrak{P}_{n\nu}(x-1)\right];$$

$$(x-1)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu}\left[\frac{\pi}{\sin\pi\sigma_n}(x-1)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x)+\mathfrak{Q}_{n\nu}(x-1)\right].$$

Damit ist die Art der linearen Abhängigkeit zwischen den n um 1 regulären Integralen $\mathfrak{P}_{n\nu}(x-1)$ bzw. $\mathfrak{Q}_{n\nu}(x-1)$ festgestellt, nämlich:

(63) $$\sum_{\nu=1}^{n} b_{n\nu}\mathfrak{P}_{n\nu}(x-1)=0;\quad \sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu}\mathfrak{Q}_{n\nu}(x-1)=0;$$

und zugleich die wichtige Identität bewiesen:

(64) $$\sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu}=\sum_{\nu=1}^{n} b_{n\nu}=\sin\pi\sigma_n.$$

Ferner erhält man durch Einsetzen der Darstellung (62) in die rechte Seite von (61) die Identität:

$$(-x)^{1-\beta_\lambda}\Phi_{n\lambda}(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_{n\nu}}{\sin\pi(\beta_\lambda-\alpha_\nu)}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{b_{n\mu}}{\sin\pi(\beta_\mu-\alpha_\nu)}(-x)^{1-\beta_\mu}\Phi_{n\mu}(x).$$

Daraus ergeben sich mit Benützung des bekannten Symbols $\delta_{\lambda\mu}=\begin{cases}1 & \lambda=\mu\\ 0 & \lambda\neq\mu\end{cases}$ folgende beiden, nach den Vertauschungsrelationen (XII) dualen Beziehungen:

(65)
$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_{n\nu}}{\sin\pi(\beta_\lambda-\alpha_\nu)\sin\pi(\beta_\mu-\alpha_\nu)}=\frac{\delta_{\lambda\mu}}{b_{n\lambda}}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{b_{n\nu}}{\sin\pi(\beta_\nu-\alpha_\lambda)\sin\pi(\beta_\nu-\alpha_\mu)}=\frac{\delta_{\lambda\mu}}{a_{n\lambda}}$$

Zwei ähnliche Relationen erhält man, wenn man für die Hauptintegrale auf der rechten Seite in (58) die Darstellung (61) einsetzt und das Ergebnis mit (59) vergleicht; doch werden diese im folgenden nicht benötigt.

Schreibt man die Gleichungen (61) und (62) in der üblichen Normierung, ersetzt also die Funktionen $\Phi_{n\nu}(x)$ und $\Psi_{n\nu}(x)$ bzw. durch $\frac{\Phi_{n\nu}(x)}{\Phi_{n\nu}(0)}=F\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_\nu,\ \cdot\cdot\\ \beta_1+1-\beta_\nu,\ \cdot\cdot\end{matrix}\middle|\ x\right)$ und $\frac{\Psi_{n\nu}(x)}{\Psi_{n\nu}(\infty)}=F\left(\begin{matrix}\alpha_\nu+1-\beta_1,\ \cdot\cdot\\ \alpha_\nu+1-\alpha_1,\ \cdot\cdot\end{matrix}\middle|\ \frac{1}{x}\right)$, so lauten die Koeffizienten der aus (61) entstehenden Übergangssubstitution: $\frac{a_{n\nu}}{\sin\pi(\beta_\lambda-\alpha_\nu)}\cdot\frac{\Psi_{n\nu}(\infty)}{\Phi_{n\lambda}(0)}=\prod_{\rho=1}^{n}{}'\frac{\Gamma(\alpha_\rho-\alpha_\nu)}{\Gamma(\alpha_\rho+1-\beta_\lambda)}\prod_{\rho=1}^{n}{}'\frac{\Gamma(\beta_\rho+1-\beta_\lambda)}{\Gamma(\beta_\rho-\alpha_\nu)}$.

[Das Symbol $\prod_{\rho=1}^{n}{}'$ wurde bei Gleichung (60) eingeführt.] Entsprechendes gilt für (62). In dieser Form erscheinen die genannten beiden Gleichungen bei Rajewski (L. 8).

In Anwendung der gefundenen Übergangssubstitutionen sollen jene beiden partikulären Integrale durch die Hauptintegrale ausgedrückt werden, die sich aus der Integraldarstellung (19) bei folgender Wahl ergeben:

$$(t_1, t_2) = (x, \infty); \quad J_{n-1}(t) = x^{1-\beta_\lambda}\, \Phi_{n-1,\lambda}(t) \quad \text{und}$$

$$(t_1, t_2) = (0, x)\ ; \quad J_{n-1}(t) = x^{-\alpha_\lambda}\, \Psi_{n-1,\lambda}(t).$$

In der mittels $t = xu$ transformierten Form [vgl. (15)] und bei entsprechender Wahl der Konstante C_n schreibt sich das erste Integral:

$$J = \frac{1}{\Gamma(\beta_n - \alpha_n)} \int_1^\infty u^{\alpha_n - 1} (u-1)^{\beta_n - \alpha_n - 1}\, (-xu)^{1-\beta_\lambda}\, \Phi_{n-1,\lambda}(xu)\, du,$$

wobei $(-xu)^\rho = (-x)^\rho\, u^\rho$ mit reeller Variabler u im gleichen Sinn wie in § 4 zu verstehen ist. Wendet man nun auf das im Integranden stehende Hauptintegral die Übergangssubstitution (61) an, so erhält man:

$$J = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{a_{n-1,\nu}}{\sin \pi (\beta_\lambda - \alpha_\nu)} \frac{(-x)^{-\alpha_\nu}}{\Gamma(\beta_n - \alpha_n)} \int_1^\infty u^{\alpha_n - 1 - \alpha_\nu} (u-1)^{\beta_n - \alpha_n - 1}\, \Psi_{n-1,\nu}(xu)\, du;$$

d. h. nach (21a): $J = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{a_{n-1,\nu}}{\sin \pi (\beta_\lambda - \alpha_\nu)} (-x)^{-\alpha_\nu}\, \Psi_{n\nu}(x).$

Hieraus folgt bei Benützung der Gleichung (62):

(66a) $$J = \sum_{\mu=1}^{n} b_{n\mu} \left[\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{a_{n-1,\nu}}{\sin \pi (\beta_\lambda - \alpha_\nu)\, \sin \pi (\beta_\mu - \alpha_\nu)} \right] (-x)^{1-\beta_\mu}\, \Phi_{n\mu}(x).$$

Für $\mu \leqq n-1$ hat nach (65) die in eckigen Klammern stehende Summe $\sum_{\nu=1}^{n-1}$ den Wert $\frac{\delta_{\lambda\mu}}{b_{n-1,\lambda}}$.

Für $\mu = n$ schreibt man nach (60): $a_{n-1,\nu} = a_{n\nu} \frac{\sin \pi (\alpha_n - \alpha_\nu)}{\sin \pi (\beta_n - \alpha_\nu)}$, also:

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n-1} \ldots \right] = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{a_{n\nu}}{\sin^2 \pi (\beta_n - \alpha_\nu)} \cdot \frac{\sin \pi (\alpha_n - \alpha_\nu)}{\sin \pi (\beta_\lambda - \alpha_\nu)}.$$

Bezeichnet man nun die aus $a_{n-1,\nu}$ bzw. $b_{n-1,\nu}$ durch Vertauschen von β_n mit β_λ hervorgehenden Ausdrücke mit $a'_{n-1,\nu}$ bzw. $b'_{n-1,\nu}$, so ist nach (60):

$a'_{n-1,\nu} = a_{n\nu} \frac{\sin \pi (\alpha_n - \alpha_\nu)}{\sin \pi (\beta_\lambda - \alpha_\nu)}$; also nach (65) für $\mu = n$:

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n-1} \ldots \right] = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{a'_{n-1,\nu}}{\sin^2 \pi (\beta_n - \alpha_\nu)} = \frac{1}{b'_{n-1,\lambda}}.$$

[Man beachte stets die in (XII) (S. 37) ausgesprochenen Symmetrieeigenschaften!]

Daher sind in der Summe (66a) nur die beiden Glieder $\mu = \lambda$ und $\mu = n$ von Null verschieden, nämlich:

$$J = \frac{b_{n\lambda}}{b_{n-1,\lambda}} (-x)^{1-\beta_\lambda} \Phi_{n\lambda}(x) + \frac{b_{nn}}{b'_{n-1,\lambda}} (-x)^{1-\beta_n} \Phi_{nn}(x).$$

Nach (60) ist nun: $\frac{b_{n\lambda}}{b_{n-1,\lambda}} = \frac{\sin\pi(\beta_\lambda - \alpha_n)}{\sin\pi(\beta_\lambda - \beta_n)}$; der Wert $\frac{b_{nn}}{b'_{n-1,\lambda}}$ ergibt sich hieraus mit Rücksicht auf (XII) durch Vertauschen von β_n mit β_λ. Das Ergebnis lautet also (statt λ sei jetzt ν geschrieben):

$$\begin{aligned}(66)\qquad &\frac{1}{\Gamma(\beta_n - \alpha_n)} \int_1^\infty u^{\alpha_n - 1} (u-1)^{\beta_n - \alpha_n - 1} (-xu)^{1-\beta_\nu} \Phi_{n-1,\nu}(xu)\, du \\ &= \frac{\sin\pi(\beta_\nu - \alpha_n)}{\sin\pi(\beta_\nu - \beta_n)} (-x)^{1-\beta_\nu} \Phi_{n\nu}(x) + \frac{\sin\pi(\beta_n - \alpha_n)}{\sin\pi(\beta_n - \beta_\nu)} (-x)^{1-\beta_n} \Phi_{nn}(x).\end{aligned}$$

Ersetzt man hierin u, x, α_i, β_i bzw. durch $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{x}$, $1-\beta_i$, $1-\alpha_i$, so erhält man nach den Vertauschungsrelationen (IX) (S. 22) und (XII) (S. 37) die duale Gleichung:

$$\begin{aligned}(67)\qquad &\frac{1}{\Gamma(\beta_n - \alpha_n)} \int_0^1 u^{\alpha_n - 1} (1-u)^{\beta_n - \alpha_n - 1} (-xu)^{-\alpha_\nu} \Psi_{n-1,\nu}(xu)\, du \\ &= \frac{\sin\pi(\beta_n - \alpha_\nu)}{\sin\pi(\alpha_n - \alpha_\nu)} (-x)^{-\alpha_\nu} \Psi_{n\nu}(x) + \frac{\sin\pi(\beta_n - \alpha_n)}{\sin\pi(\alpha_\nu - \alpha_n)} (-x)^{-\alpha_n} \Psi_{n\nu}(x).\end{aligned}$$

§ 10. Übergangssubstitutionen zwischen den Fundamentalsystemen um 1 einerseits, 0 und ∞ andererseits.

Wie im vorigen Paragraphen das um 1 mehrdeutige Hauptintegral, so sollen nun auch die um 1 regulären Hauptintegrale durch die zu 0 und ∞ gehörigen Fundamentalsysteme ausgedrückt werden.

Da es sich hiebei nach Ausschluß der Integrale $\Omega_{n\nu}(x)$ um zwei Systeme $\Omega^{I}_{n\nu}(x)$ und $\Omega^{II}_{n\nu}(x)$ am Einheitspunkt handelt (vgl. den Schluß des § 4), so sind zunächst die Übergangssubstitutionen zwischen diesen beiden Systemen selbst aufzustellen. Sie sind leicht zu finden; formt man nämlich in der Integraldarstellung (26) von $\Omega^{I}_{n\nu}(x)$ den Integranden nach der Übergangssubstitution (61) um, so entsteht die Darstellung:

$$\Omega^{I}_{n\lambda}(x) = \Gamma(\alpha_n + 1 - \beta_n)\, x^{1-\beta_n} \int_{-\infty}^{0} (-t)^{\alpha_n - 1} (x-t)^{\beta_n - \alpha_n - 1} \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{a_{n-1,\nu}}{\sin\pi(\beta_\lambda - \alpha_\nu)} (-t)^{-\alpha_\nu} \Psi_{n-1,\nu}(t)\, dt.$$

Sie ist nach (27) schon die gewünschte Beziehung, zu der man auf Grund der Vertauschungsrelationen (IX) (S. 22) und (XII) (S. 37) die duale findet. Also:

$$(68)\qquad \Omega^{I}_{n\lambda}(x) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{a_{n-1,\nu}}{\sin\pi(\beta_\lambda - \alpha_\nu)} \Omega^{II}_{n\nu}(x); \qquad \Omega^{II}_{n\lambda}(x) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{b_{n-1,\nu}}{\sin\pi(\beta_\nu - \alpha_\lambda)} \Omega^{I}_{n\nu}(x).$$

Es soll nun $\Omega^{I}_{n\lambda}(x)$ durch die zu 0 gehörigen Hauptintegrale ausgedrückt werden; dabei sind die Verzweigungsschnitte $(0, -\infty)$ und $(1, +\infty)$ vorzunehmen. Die Potenz x^ρ soll in der üblichen Weise definiert werden [vgl. (IV) (S. 12)]; für $(-x)^\rho$ ergibt sich dann

je nach der getroffenen Festsetzung der Wert $e^{\pm i\pi\rho} x^{\rho}$. Eine Entscheidung ist hier entbehrlich; es genügt daran festzuhalten, daß durchweg entweder das obere oder das untere Vorzeichen gilt.

Bei der Integraldarstellung (26) für $\Omega^{I}_{n\nu}(x)$ darf nach (VIIIa) (S. 20) der Integrationsweg in den durch x gehenden Halbstrahl verlegt und mithin die Zerlegung $\int_{-\infty}^{0} = -\int_{0}^{x} - \int_{x}^{\infty}$ vorgenommen werden; die Konvergenzbedingungen sind nach (20b) und (26b) verträglich. So kommt, wenn noch $t = xu$ geschrieben wird:

$$\Omega^{I}_{n\nu} = -\Gamma(\alpha_n+1-\beta_n)\, x^{2-\beta_n} \int_0^1 [(-x)u]^{\alpha_n-\beta_\nu} [x(1-u)]^{\beta_n-\alpha_n-1} \Phi_{n-1,\nu}(xu)\, du$$

$$-\Gamma(\alpha_n+1-\beta_n)\, x^{2-\beta_n} \int_1^{\infty} [(-x)u]^{\alpha_n-1} [(-x)(u-1)]^{\beta_n-\alpha_n-1} (-xu)^{1-\beta_\nu} \Phi_{n-1,\nu}(xu)\, du.$$

Die beiden Summanden lassen sich nach (20a) und (66) folgenderweise durch Hauptintegrale ausdrücken:

$$\frac{\sin\pi(\beta_n-\alpha_n)}{\pi}\,\Omega^{I}_{n\nu}(x) = -e^{\pm i\pi(\alpha_n-\beta_\nu)}\, x^{1-\beta_\nu}\Phi_{n\nu}(x) -$$

$$-e^{\pm i\pi\beta_n}\left[\frac{\sin\pi(\beta_\nu-\alpha_n)}{\sin\pi(\beta_\nu-\beta_n)}(-x)^{1-\beta_\nu}\Phi_{n\nu}(x) + \frac{\sin\pi(\beta_n-\alpha_n)}{\sin\pi(\beta_n-\beta_\nu)}(-x)^{1-\beta_n}\Phi_{nn}(x)\right]$$

$$= \left[e^{\pm i\pi(\alpha_n-\beta_\nu)}\sin\pi(\beta_n-\beta_\nu) + e^{\pm i\pi(\beta_n-\beta_\nu)}\sin\pi(\beta_\nu-\alpha_n)\right]\frac{x^{1-\beta_\nu}\Phi_{n\nu}(x)}{\sin\pi(\beta_\nu-\beta_n)} -$$

$$-\frac{\sin\pi(\beta_n-\alpha_n)}{\sin\pi(\beta_\nu-\beta_n)}\, x^{1-\beta_n}\Phi_{nn}(x).$$

Die Umformung: $e^{\mp i\alpha}\sin\beta + e^{\pm i\beta}\sin\alpha = (\cos\alpha \mp i\sin\alpha)\sin\beta + (\cos\beta \pm i\sin\beta)\sin\alpha = \sin(\alpha+\beta)$ ergibt für den in eckigen Klammern stehenden Koeffizienten des ersten Gliedes den Wert $\sin\pi(\beta_n-\alpha_n)$.

Mit Hinzunahme der aus den Vertauschungsrelationen (IX), (XII) folgenden dualen Gleichung lautet das Ergebnis:

(69) $$\Omega^{I}_{n\nu}(x) = \frac{\pi}{\sin\pi(\beta_\nu-\beta_n)}\left[x^{1-\beta_\nu}\Phi_{n\nu}(x) - x^{1-\beta_n}\Phi_{nn}(x)\right];$$

(70) $$\Omega^{II}_{n\nu}(x) = \frac{\pi}{\sin\pi(\alpha_n-\alpha_\nu)}\left[x^{-\alpha_\nu}\Psi_{n\nu}(x) - x^{-\alpha_n}\Psi_{nn}(x)\right].$$

Aus dieser Darstellung folgt, daß die $n-1$ Integrale $\Omega^{I}_{n\nu}(x)$ sicher dann linear unabhängig sind, wenn die n Integrale $x^{1-\beta_\nu}\Phi_{n\nu}(x)$ es sind; das Analoge gilt für $\Omega^{II}_{n\nu}(x)$. Ferner lassen sich nun die in (X) (S. 29) ausgesprochenen Symmetrieeigenschaften der Hauptintegrale wie folgt ergänzen:

(XIII) *Die Funktion* $\Omega^{I}_{n\nu}(x)$ *ist symmetrisch in den* n *Parametern* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, *den* $n-2$ *Parametern* $\beta_1, \ldots \beta_{\nu-1}, \beta_{\nu+1}, \ldots \beta_{n-1}$ *und den* 2 *Parametern* β_ν, β_n. *Bei Vertauschung von* β_ν *mit* β_λ *vertauscht sich* $\Omega^{I}_{n\nu}(x)$ *mit* $\Omega^{I}_{n\lambda}(x)$; *bei Vertauschung von* β_n *mit* $\beta_k (k<n, \neq\nu)$ *geht* $\Omega^{I}_{n\nu}(x)$ *in ein anderes um* 1 *reguläres Integral über. Die hiezu dualen Eigenschaften im Sinn der Vertauschungsrelation (IX) (S. 22) besitzt* $\Omega^{II}_{n\nu}(x)$.

Die umgekehrten Übergangssubstitutionen von 0 nach 1 findet man, wenn man die n linearen Gleichungen (58) und (69) nach den n zu 0 gehörigen Hauptintegralen auflöst.

Die Matrix M, nach welcher sich die n Funktionen:

$$\frac{\sin\pi(\beta_1-\beta_n)}{\pi}\Omega^{I}_{n1}(x),\ \ldots\ \frac{\sin\pi(\beta_{n-1}-\beta_n)}{\pi}\Omega^{I}_{n,\,n-1}(x),\ \pi(1-x)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x)$$

durch die n Funktionen: $x^{1-\beta_1}\Phi_{n1}(x),\ \ldots\ x^{1-\beta_n}\Phi_{nn}(x)$ ausdrücken, sowie die zu M adjungierte Matrix $s\cdot M^{-1}$ lauten:

$$\textbf{(71)}\qquad M=\begin{Vmatrix} 1, & 0, & \ldots & 0, & -1\\ 0, & 1, & \ldots & 0, & -1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0, & 0, & \ldots & 1, & -1\\ b_1, & b_2, & \ldots & b_{n-1}, & b_n \end{Vmatrix};\qquad s\cdot M^{-1}=\begin{Vmatrix} s-b_1, & -b_2, & \ldots & -b_{n-1}, & 1\\ -b_1, & s-b_2, & \ldots & -b_{n-1}, & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ -b_1, & -b_2, & \ldots & s-b_{n-1}, & 1\\ -b_1, & -b_2, & \ldots & -b_{n-1}, & 1 \end{Vmatrix}$$

Dabei wurden die Abkürzungen vorgenommen:

$$\textbf{(71a)}\qquad b_\nu=b_{n\nu};\ s=\sin\pi\sigma_n.$$

Der Wert $\sin\pi\sigma_n$ für die Determinante von M ergibt sich durch Addition der $n-1$ ersten Kolonnen zur letzten; dadurch werden alle Elemente der letzten Kolonne Null mit Ausnahme des in der n^{ten} Zeile stehenden, welches nach (64) den Wert $\sum_{\nu=1}^{n} b_{n\nu}=\sin\pi\sigma_n$ bekommt.

Von der Richtigkeit der angegebenen adjungierten Matrix überzeugt man sich leicht durch Multiplikation der beiden Matrizen. Man erhält nämlich durch Kombination der Zeilen von M und Kolonnen von $s\cdot M^{-1}$ folgende Werte, wo i und k irgend zwei der Zahlen $1,2\ldots n-1$ bedeuten:

i^{te} Zeile mal k^{te} Kolonne: $1\cdot(\delta_{ik}\,s-b_k)+(-1)(-b_k)=\delta_{ik}s;$

i^{te} „ „ n^{te} „ : $1\cdot1+(-1)\cdot1=0;$

n^{te} „ „ k^{te} „ : $b_k s-\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\cdot b_k=0;$

n^{te} „ „ n^{te} „ : $\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu=s.$

Ist $s\neq0$, d. h. σ_n keine ganze Zahl, so existiert also die zu M inverse Matrix M^{-1}; sie vermittelt die folgende Übergangssubstitution, zu der auf Grund der Vertauschungsrelationen die duale gefügt sei:

$$\textbf{(72)}\quad x^{1-\beta\lambda}\Phi_{n\lambda}(x)=\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\delta_{\nu\lambda}-\frac{b_{n\nu}}{\sin\pi\sigma_n}\right]\frac{\sin\pi(\beta_\nu-\beta_n)}{\pi}\Omega^{I}_{n\nu}(x)+\frac{\pi}{\sin\pi\sigma_n}(1-x)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x);$$

$$\textbf{(73)}\quad x^{-\alpha\lambda}\Psi_{n\lambda}(x)=\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\delta_{\nu\lambda}-\frac{a_{n\nu}}{\sin\pi\sigma_n}\right]\frac{\sin\pi(\alpha_n-\alpha_\nu)}{\pi}\Omega^{II}_{n\nu}(x)+\frac{\pi}{\sin\pi\sigma_n}(x-1)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x).$$

Damit sind auch die in (52) und (53) auftretenden Potenzreihen $\mathfrak{P}_{n\nu}(x-1)$ und $\mathfrak{Q}_{n\nu}(x-1)$ durch Hauptintegrale ausgedrückt.

Um für das folgende eine kurze Ausdrucksweise zu haben, wollen wir als Übergangssubstitution S_{ab} jene bezeichnen, welche die zu a gehörigen Hauptintegrale durch das zu b gehörige Fundamentalsystem ausdrückt; S_{ab} und S_{ba} bezeichnen also zwei inverse Substitutionen. Die am Schlusse dieser Arbeit angebrachte Ausschlag-Tafel enthält eine Zusammenstellung aller Übergangssubstitutionen, welche die Lektüre des folgenden Kapitels erleichtern soll.

Viertes Kapitel.

Besonderheiten.

§ 11. Ausgezeichnete Werte der Parameter.

Sowohl die in § 6 aufgestellten Reihenentwicklungen als auch die in den beiden vorhergehenden Paragraphen aufgefundenen Übergangssubstitutionen sind an gewisse Einschränkungen bezüglich der Parameter gebunden. Es gibt ausgezeichnete Parameterwerte, für welche sie ihre Gültigkeit verlieren; in einigen dieser Fälle genügt eine geringfügige Modifikation der Darstellung um sie auch für diese Ausnahmewerte sinnvoll zu machen, während in anderen Fällen neue Hilfsintegrale der Differentialgleichung aufzusuchen sind.

Es soll nun zunächst eine Übersicht und Klassifikation dieser verschiedenen Möglichkeiten gegeben werden.

Mit g sei im folgenden stets eine ganze positive Zahl oder Null gemeint.

I.

Ist die Differenz $\alpha_i - \beta_k$ ganzzahlig, so verschwindet der Faktor $\sin\pi(\beta_k - \alpha_i)$ in den Ausdrücken a_{ni} und b_{nk} (60), so daß $a_{ni} = b_{nk} = 0$ wird.

Ist insbesondere $\alpha_i + 1 - \beta_k$ eine positive ganze Zahl, so bleiben alle Reihenentwicklungen [(44) bis (49)] und alle Übergangssubstitutionen gültig. Es entstehen lediglich Spezialisierungen folgender Art: In allen Gleichungen der Übergangssubstitution $S_{\infty 0}$ (62) mit Ausnahme von $\lambda = i$ verschwindet auf der rechten Seite das Glied mit $x^{1-\beta_k}\Phi_{nk}(x)$; in allen Gleichungen von S_{01} (72) außer für $\lambda = k$ das Glied mit $\Omega^{l}_{nk}(x)$ (falls $k < n$); usw. in den übrigen Fällen.

II.

Ist dagegen $\alpha_i + 1 - \beta_k = -g$ eine *negative* ganze Zahl oder Null, so werden die Funktionen $\Phi_{nk}(x)$ und $\Psi_{ni}(x)$ unendlich, wie man aus ihren Reihenentwicklungen [(44) bis (47)] ersieht, und sind durch die endlich bleibenden Funktionen $\frac{\Phi_{nk}(x)}{\Gamma(\alpha_i + 1 - \beta_k)}$ bzw. $\frac{\Psi_{ni}(x)}{\Gamma(\alpha_i + 1 - \beta_k)}$ zu ersetzen; letztere werden nach (44) und (46) durch abbrechende Potenzreihen dargestellt, sind also ganze rationale Funktionen von x bzw. $\frac{1}{x}$.

Die Übergangssubstitutionen S_{10} (58) und $S_{1\infty}$ (59); ferner $S_{0\infty}$ (61) für $\lambda \neq k$ und $S_{\infty 0}$ (62) für $\lambda \neq i$ bleiben ohne weiteres gültig, wobei zu beachten ist, daß das Produkt

aus dem in a_{ni} bzw. b_{nk} enthaltenen verschwindenden Faktor $\sin\pi(\beta_k-\alpha_i)$ mit der unendlich werdenden Funktion $\Phi_{nk}(x)$ bzw. $\Psi_{ni}(x)$ den endlichen Wert $\frac{\pi}{\Gamma(\beta_k-\alpha_i)}\left[\frac{\Phi_{nk}(x)}{\Gamma(\alpha_i+1-\beta_k)}\right]$ bzw. $\frac{\pi}{\Gamma(\beta_k-\alpha_i)}\left[\frac{\Psi_{ni}(x)}{\Gamma(\alpha_i+1-\beta_k)}\right]$ besitzt. Dagegen reduzieren sich die beiden Gleichungen (61) für $\lambda=k$ und (62) für $\lambda=i$ bei Division durch $\Gamma(\alpha_i+1-\beta_k)$ auf folgende einfache Beziehung:

$$\textbf{(74)}\qquad \frac{(-x)^{1-\beta_k}\Phi_{nk}(x)}{\Gamma(\alpha_i+1-\beta_k)} = \gamma\frac{(-x)^{-\alpha_i}\Psi_{ni}(x)}{\Gamma(\alpha_i+1-\beta_k)} \quad [\alpha_i+1-\beta_k=-g],$$

wo $\gamma=\frac{a_{ni}}{\sin\pi(\beta_k-\alpha_i)}=\frac{\sin\pi(\beta_k-\alpha_i)}{b_{nk}}$ ist oder ausführlich geschrieben [vgl. (60)]:

$$\textbf{(74a)}\qquad \gamma=\frac{[k]'\sin\pi(\beta_\rho-\alpha_i)}{[i]'\sin\pi(\alpha_\rho-\alpha_i)}=\frac{[k]'\sin\pi(\beta_k-\beta_\rho)}{[i]'\sin\pi(\beta_k-\alpha_\rho)}.$$

Dabei sei in diesem und dem folgenden Paragraphen stets $\Pi=\prod_{\rho=1}^{n}$ und $[k]'=\prod_{\rho=1}^{n}{}'$ gemäß der bei Gleichung (60) eingeführten Definition verstanden.

(74) stellt eine bemerkenswerte Beziehung zwischen zwei abbrechenden Reihen der Form $f_n(x)$ und $f_n(\frac{1}{x})$ dar, die sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit bei der Wahl $i=k=1$, $\beta_1=1$, also $\alpha_1=-g$ in der folgenden Form schreibt: [Vgl. (44), (46)]

$$\textbf{(75a)}\qquad \frac{1}{\Gamma(-g)}f\left(\begin{matrix}-g,\ \alpha_2,\ldots\alpha_n\\ 1,\ \beta_2,\ldots\beta_n\end{matrix}\middle|x\right)=\prod_{\rho=2}^{n}\frac{\sin\pi\beta_\rho}{\sin\pi\alpha_\rho}\cdot\frac{(-x)^g}{\Gamma(-g)}f\left(\begin{matrix}-g,\ 1-g-\beta_2,\ldots 1-g-\beta_n\\ 1,\ 1-g-\alpha_2,\ldots 1-g-\alpha_n\end{matrix}\middle|\frac{1}{x}\right)$$

oder nach (37):

$$\textbf{(75)}^1\qquad F\left(\begin{matrix}-g,\ \alpha_2,\ldots\alpha_n\\ 1,\ \beta_2,\ldots\beta_n\end{matrix}\middle|x\right)=\prod_{\rho=2}^{n}\frac{[\alpha_\rho]_g}{[\beta_\rho]_g}\cdot(-x)^g F\left(\begin{matrix}-g,\ 1-g-\beta_2,\ldots 1-g-\beta_n\\ 1,\ 1-g-\alpha_2,\ldots 1-g-\alpha_n\end{matrix}\middle|\frac{1}{x}\right).$$

Ferner wird das Hauptintegral $\Omega^{I}_{nk}(x)$, falls $k<n$, unendlich und ist gemäß der Substitution S_{10} (69) durch das folgende zu ersetzen:

$$\textbf{(76)}\qquad \frac{\Omega^{I}_{nk}(x)}{\Gamma(\alpha_i+1-\beta_k)}=\frac{\pi}{\sin\pi(\beta_k-\beta_n)}\cdot\frac{x^{1-\beta_k}\Phi_{nk}(x)}{\Gamma(\alpha_i+1-\beta_k)} \quad [\alpha_i+1-\beta_k=-g].$$

Für $k=n$ hingegen werden alle Hauptintegrale $\Omega^{I}_{n\nu}(x)$ unendlich und in der Form $\frac{\Omega^{I}_{n\nu}(x)}{\Gamma(\alpha_i+1-\beta_n)}$ alle zu $\frac{x^{1-\beta_n}\Phi_{nn}(x)}{\Gamma(\alpha_i+1-\beta_n)}$ proportional, also linear abhängig. Doch kann dieser Fall $k=n$ durch Änderung in der Numerierung der Parameter β_ν auf den vorigen $k<n$ zurückgeführt werden.

Das Analoge gilt für die Integrale $\Omega^{II}_{n\nu}(x)$ mit Unterscheidung der beiden Fälle $i<n$ und $i=n$.

Die übrigen Übergangssubstitutionen bleiben gleichfalls mit geringfügigen Modifikationen gültig; insbesondere folgt aus S_{01} (72) für $\lambda=k$ $(<n)$:

---

[1] Vgl. Rajewski, L. 8.

(77) $$\frac{x^{1-\beta_k}\,\Phi_{nk}(x)}{\Gamma(\alpha_i+1-\beta_k)}=\frac{\sin\pi(\beta_k-\beta_n)}{\pi}\cdot\frac{\Omega^{I}_{nk}(x)}{\Gamma(\alpha_i+1-\beta_k)}\qquad[\alpha_i+1-\beta_k=-g]$$

und eine analoge Gleichung aus (73) für $\lambda=i$.

III.

Besitzen zwei Parameter β_ν eine ganzzahlige Differenz $\beta_i-\beta_k=g\ (\geqq 0)$, so bleiben die Funktionen $\Phi_{n\nu}(x)$ und $\Psi_{n\nu}(x)$ sämtlich sinnvoll; dagegen werden die Koeffizienten b_{ni} und b_{nk} unendlich infolge des im Nenner auftretenden verschwindenden Faktors $\sin\pi(\beta_i-\beta_k)$.

Aus der Reihenentwicklung (34) für $f_n(x)$ entnimmt man die Beziehung:

(78) $$f\left(\begin{matrix}\alpha_1,\,..\,\alpha_n\\ \beta_1,\,..\,\beta_n\end{matrix}\middle|\,x\right)=\sum_{\lambda=0}^{l-1}\prod_{\rho=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_\rho+\lambda)}{\Gamma(\beta_\rho+\lambda)}\cdot x^\lambda+x^l\,f\left(\begin{matrix}\alpha_1+l,\,..\,\alpha_n+l\\ \beta_1+l,\,..\,\beta_n+l\end{matrix}\middle|\,x\right).$$

Wendet man sie auf $\Phi_{ni}(x)$ (44) mit $l=g$ $(g\geqq 1)$ und $1-\beta_i+g=1\quad\beta_k$ an, so kommt:

(78a) $$\Phi_{ni}(x)=\sum_{\lambda=0}^{g-1}\prod_{\rho=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_\rho+1-\beta_i+\lambda)}{\Gamma(\beta_\rho+1-\beta_i+\lambda)}\cdot x^\lambda+x^g\,\Phi_{nk}(x).$$

Der Koeffizient von x^λ enthält den für $0\leqq\lambda\leqq g-1$ verschwindenden Faktor:

$\frac{1}{\Gamma(\beta_k+1-\beta_i+\lambda)}=\frac{1}{\Gamma(1-g+\lambda)}$. Daraus folgt i. a., d. h. wenn keine weiteren Spezialisierungen der Parameter vorliegen, die Identität:

(79) $$x^{1-\beta_i}\,\Phi_{ni}(x)\equiv x^{1-\beta_k}\,\Phi_{nk}(x)\quad[\beta_i-\beta_k=g],$$

die für den (vorhin ausgeschlossenen) Fall $g=0$ selbstverständlich ist.

Da also die n Integrale $x^{1-\beta_\nu}\,\Phi_{n\nu}(x)$ kein Fundamentalsystem mehr bilden, müssen die Übergangssubstitutionen S_{10} (58) und $S_{\infty 0}$ (62) ihre Gültigkeit verlieren; in der Tat werden hier die beiden Glieder mit $\nu=i$ und $\nu=k$ auf der rechten Seite unendlich.

Ferner wird nach (69) $\Omega^{I}_{ni}(x)\equiv\Omega^{I}_{nk}(x)$, falls $i<n$, $k<n$; es sind also auch die $n-1$ Integrale $\Omega^{I}_{n\nu}(x)$ linear abhängig, woraus sich eine entsprechende Konsequenz für die Übergangssubstitutionen S_{01} (72) und S_{11} (68) ergibt. In den Fällen $i=n$ und $k=n$ dagegen hat das Integral $\Omega^{I}_{nk}(x)$ bzw. $\Omega^{I}_{ni}(x)$ nach (69) den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$, der im folgenden Paragraphen untersucht wird [vgl. (89a) und (89b)].

Alle anderen Übergangssubstitutionen, nämlich (59), (61), (70) und (73) bleiben sinnvoll.

IV.

Analog hat der Fall $\alpha_k-\alpha_i=g$ zur Folge, daß i. a. (d. h. abgesehen von weiteren Spezialisierungen der Parameter) die n Integrale $x^{-\alpha_\nu}\,\Psi_{n\nu}(x)$ und die $n-1$ Integrale $\Omega^{II}_{n\nu}(x)$ linear abhängig werden; die Einzelheiten ergeben sich aus dem Vorigen durch duale Übertragung auf Grund der Vertauschungsrelationen.

V.

Ist endlich σ_n eine ganze Zahl, so ist $(x-1)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x)$ ein um $x=1$ reguläres Integral, das für $\sigma_n \geqq 1$ zum Exponenten σ_n-1, für $\sigma_n \leqq 1$ zum Exponenten 0 gehört; ist nämlich $\sigma_n = -g$ eine ganze negative Zahl oder Null, so verschwinden in der Reihenentwicklung (48) [vgl. (51)] die ersten Koeffizienten für $\lambda = 0, 1, \ldots g$.

Aus (69) und (70) folgt, daß die $n-1$ Integrale $\Omega^{I}_{n\nu}(x)$ und $\Omega^{II}_{n\nu}(x)$ i. a. linear unabhängig bleiben, während $(x-1)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x)$ nach (72) und (73) von diesen abhängig wird:

(80) $$(1-x)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x) = \frac{1}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{n-1} b_{n\nu}\sin\pi(\beta_\nu-\beta_n)\,\Omega^{I}_{n\nu}(x) \quad [\sigma_n = \pm g];$$

(81) $$(x-1)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x) = \frac{1}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{n-1} a_{n\nu}\sin\pi(\alpha_n-\alpha_\nu)\,\Omega^{II}_{n\nu}(x) \quad [\sigma_n = \pm g].$$

Alle Übergangssubstitutionen mit Ausnahme der beiden letztgenannten bleiben sinnvoll.

VI.

Es soll noch untersucht werden, ob es in den Fällen III, IV, V weitere Spezialisierungen der Parameterwerte gibt, für welche die gefundenen linearen Abhängigkeiten zwischen den Hauptintegralen [siehe (79), (80), (81)] ihre Gültigkeit wieder verlieren.

Im Fall III ($\beta_i-\beta_k = g$) ist also zu fordern, daß nicht alle Koeffizienten von x^λ für $0 \leqq \lambda \leqq g-1$ in der Gleichung (78a) verschwinden. Diese Koeffizienten müssen folglich einen unendlich werdenden Faktor besitzen, d. h. eine Linearkombination $\alpha_l+1-\beta_i+\lambda$ muß Null oder eine ganze negative Zahl sein. Setzt man demnach $\beta_i-\alpha_l = h$, wo h eine ganze Zahl $\geqq 1$ bedeutet, so ist der Wert des folgenden Faktors zu untersuchen:

$$\frac{\Gamma(\alpha_l+1-\beta_i+\lambda)}{\Gamma(\beta_k+1-\beta_i+\lambda)} = \frac{\Gamma(1-h+\lambda)}{\Gamma(1-g+\lambda)} = \begin{cases} [(1-h+\lambda)(2-h+\lambda)\ldots(-g+\lambda)]^{-1} & \text{für } h>g \\ (1-g+\lambda)(2-g+\lambda)\ldots(-h+\lambda) & \text{für } g>h \end{cases}$$

Im Falle $h>g$ ist dieser Wert für $g \leqq \lambda \leqq h-1$ unendlich;
„ „ $h=g$ ist er für alle λ stets gleich 1;
„ „ $h<g$ ist er für alle λ endlich und verschwindet für $h \leqq \lambda \leqq g-1$.

Für $h>g$ ist sowohl $\alpha_l+1-\beta_i = 1-h$ als auch $\alpha_l+1-\beta_k = 1-h+g$ eine ganze negative Zahl oder Null und es ist nach den in II. angegebenen Regeln zu verfahren; gleichzeitig bleibt das unter III. Gesagte im Wesentlichen gültig. $\dfrac{\Phi_{ni}(x)}{\Gamma(\alpha_l+1-\beta_i)}$ bleibt endlich und wird durch eine abbrechende Potenzreihe dargestellt, da die Koeffizienten nur für $g \leqq \lambda \leqq h-1$ von Null verschieden sind; die Identität (79) ist demgemäß in der Form zu schreiben:

$$\frac{x^{1-\beta_i}\Phi_{ni}(x)}{\Gamma(\alpha_l+1-\beta_i)} = \frac{x^{1-\beta_k}\Phi_{n}(x)}{\Gamma(\alpha_l+1-\beta_i)}.$$

Dagegen ist für $g \geqq h$ $\Phi_{ni}(x)$ endlich und $\Phi_{ni}(0) \neq 0$, so daß die n Integrale $x^{1-\beta_\nu}\Phi_{n\nu}(x)$ wieder ein Fundamentalsystem bilden. [Natürlich ist auch $\Phi_{nk}(x)$ endlich und $\Phi_{nk}(0) \neq 0$, da $\alpha_l+1-\beta_k$ und $\beta_i+1-\beta_k$ ganze positive Zahlen sind.]

Auch die Ausdrücke b_{ni} und b_{nk} bleiben endlich; denn sie enthalten im Zähler und Nenner je einen verschwindenden Faktor, deren Quotient folgenden endlichen Wert besitzt:

$$\text{in } b_{ni}\text{:}\ \frac{\sin\pi(\beta_i-\alpha_l)}{\sin\pi(\beta_i-\beta_k)}=(-1)^{g-h};\quad \text{in } b_{nk}\text{:}\ \frac{\sin\pi(\beta_k-\alpha_l)}{\sin\pi(\beta_k-\beta_i)}=(-1)^{h}.$$

$\Psi_{nl}(x)$ ist nach II. durch die endlich bleibende Funktion $\frac{\Psi_{nl}(x)}{\Gamma(\alpha_l+1-\beta_i)}$ zu ersetzen. Die Integrale $\Omega^{I}_{n\nu}(x)$ [vgl. (69)] bleiben sämtlich sinnvoll und linear unabhängig, während das Integral $\Omega^{II}_{nl}(x)$ durch $\frac{\Omega^{II}_{nl}(x)}{\Gamma(\alpha_l+1-\beta_i)}$ zu ersetzen ist (falls $l<n$; bezüglich des Falles $l=n$ vgl. II.). — Mit Berücksichtigung der genannten Modifikationen bleiben alle Übergangssubstitutionen gültig.

Über den Fall IV. sind aus Analogiegründen keine weiteren Worte zu verlieren.

In dem unter V. genannten Fall $\sigma_n=-g$ $(g\geqq 0)$ sind die Bedingungen dafür zu finden, daß in der Reihenentwicklung von $(x-1)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x)$ nicht alle Koeffizienten für $\lambda\leqq g$ verschwinden. Diese Forderung kann nur von der folgenden Reihenentwicklung erfüllt werden:

$\Gamma(\sigma_n)(1-x)^{\sigma_n-1}\,\Omega_{nn}(x)=x^{1-\beta_n}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{g_{n-1,\lambda}}{[\sigma_n]_\lambda}(1-x)^{\sigma_n-1+\lambda}$ [siehe (48) und (51)], falls alle Koeffizienten endlich bleiben, also die Reihe $\sum_{\lambda=0}^{\infty} g_{n-1,\lambda}x^{\lambda}$ spätestens nach dem Gliede $\lambda=g$ abbricht. Also müssen nach (51a) alle $n-1$ Reihen $\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{[\sigma_k]_\lambda\,[\beta_k-\alpha_{k+1}]_\lambda}{\lambda!}x^{\lambda}$ abbrechen; ist der Exponent des letzten nichtverschwindenden Gliedes $\lambda=\lambda_k$, also entweder $\sigma_k=-\lambda_k$ oder $\beta_k-\alpha_{k+1}=-\lambda_k$, $(k=1,\,..\,n-1)$, so muß außerdem $\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\leqq g$ sein. Diese (für größere Werte von n ziemlich komplizierten) Bedingungen sind also notwendig und hinreichend dafür, daß $\Gamma(\sigma_n)(1-x)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x)$ im Fall $\sigma_n=-g$ von den um 1 regulären Integralen linear unabhängig ist, indem es für $x=1$ zum Exponenten $\sigma_n-1=-g-1$ gehört. Die stets gültige Gleichung (80) oder (81) nimmt in diesem Fall die Form $0=0$ an.

Zum gleichen Ergebnis führt im Fall $\sigma_n-1=+g$ $(\geqq 0)$ die Forderung, daß in der nach Potenzen von $x-1$ fortschreitenden Reihenentwicklung der rechten Seite von (80) oder (81) nach Multiplikation mit einem gewissen Faktor alle Koeffizienten endlich bleiben und nicht alle Koeffizienten für $\lambda<g$ verschwinden. Doch dürften die Bedingungen hiefür im Fall $n\geqq 3$ bei dem komplizierten Bau der Reihenentwicklungen der um 1 regulären Hauptintegrale sich in recht komplizierter Form darstellen.

Die in vorstehenden Einzeluntersuchungen enthaltenen Ergebnisse hinsichtlich der linearen Unabhängigkeit von Hauptintegralen seien in folgendem Satz zusammengefaßt; dabei seien zwei duale Sätze mit Benützung eckiger Klammern in einen einzigen verschmolzen.

(XIV) *Für die lineare Unabhängigkeit der* n *Hauptintegrale* $x^{1-\beta_\nu}\Phi_{n\nu}(x)\left[x^{-\alpha_\nu}\Psi_{n\nu}(x)\right]$ *sowie der* n—1 *Hauptintegrale* $\Omega^{I}_{n\nu}(x)$ $[\Omega^{II}_{n\nu}(x)]$ *ist notwendig und hinreichend, daß die* n *Parameter* β_i $[\alpha_i]$ $(i=1, \ldots n)$ *keine ganzzahligen Differenzen (einschließlich Null) aufweisen oder aber beim Auftreten einer ganzzahligen Differenz* $\beta_i-\beta_\nu>0$ $[\alpha_k-\alpha_i>0]$ *ein Parameter* α_1 $[\beta_1]$ *existiert, so daß die Differenz* $\beta_i-\alpha_1$ $[\beta_1-\alpha_i]$ *eine dem Intervall* $1\leqq\beta_i-\alpha_1\leqq\beta_i-\beta_k[1\leqq\beta_1-\alpha_i\leqq\alpha_k-\alpha_i]$ *angehörige ganze Zahl ist. Für die Unabhängigkeit des Integrales* $(x-1)^{\sigma_n-1}\Omega_{nn}(x)$ *von den am Einheitspunkt regulären Integralen ist hinreichend, daß* σ_n *keine ganze Zahl ist.*

Der Vollständigkeit halber werde in diesem Zusammenhang auch für die lineare Unabhängigkeit der n—1 Integrale $\Omega_{n\nu}(x)$ die hinreichende Bedingung genannt, daß keine der Größen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}$ ganzzahlig ist und die n Parameter α_i oder die n Parameter β_i keine ganzzahligen Differenzen besitzen. Doch sei es wegen der Bedeutungslosigkeit der Integrale $\Omega_{n\nu}(x)$ gestattet, den Beweis zu übergehen.

§ 12. *Logarithmenbehaftete Ersatzintegrale und ihre analytischen Fortsetzungen.*

In jenen Fällen, in denen die zum gleichen singulären Punkt gehörigen n Hauptintegrale kein Fundamentalsystem mehr bilden, sollen Ersatzintegrale angegeben werden, welche sich bekanntlich durch logarithmenbehaftete Reihenentwicklungen darstellen lassen.

Zur Untersuchung des im vorigen Paragraphen unter III genannten Falles (wobei von weiteren Spezialisierungen der Parameterwerte abgesehen sei) verstehe man wie bisher unter g eine ganze Zahl $\geqq 0$, ferner unter ε eine Zahl mit beliebig kleinem absoluten Betrag und setze:

(82) $$1-\beta_i=r+\varepsilon;\quad 1-\beta_k=r+g;\quad \text{also:}\quad \beta_i-\beta_k=g-\varepsilon.$$

Dann wird [vgl. (44)]:

(82a) $$x^{1-\beta_i}\Phi_{ni}(x)=x^{r+\varepsilon}\,f\left(\begin{matrix}\ldots, \alpha_n+r+\varepsilon\\ \ldots, \beta_n+r+\varepsilon\end{matrix}\middle| x\right);$$

(82b) und: $$x^{1-\beta_k}\Phi_{nk}(x)=x^{r+g}\,f\left(\begin{matrix}\ldots, \alpha_n+r+g\\ \ldots, \beta_n+r+g\end{matrix}\middle| x\right).$$

Das zweite Integral läßt sich auch in der Form schreiben:

(82c) $$x^{1-\beta_k}\Phi_{nk}(x)=x^{r}\,f\left(\begin{matrix}\ldots, \alpha_n+r\\ \ldots, \beta_n+r\end{matrix}\middle| x\right).$$

Denn diese beiden Reihen unterscheiden sich nach (78) um g Glieder mit den Potenzen $x^{r+\lambda}$ $(\lambda=0,1, \ldots g-1)$, deren Koeffizienten den verschwindenden Faktor: $\dfrac{1}{\Gamma(\beta_k+r+\lambda)}$ $=\dfrac{1}{\Gamma(1-g+\lambda)}$ enthalten.

Als Linearkombination der beiden Hauptintegrale (82a) und (82c) erhält man folgendes partikuläre Integral:

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[x^{1-\beta_i}\Phi_{ni}(x)-x^{1-\beta_k}\Phi_{nk}(x)\right]=\frac{1}{\varepsilon}\left[x^{r+\varepsilon}\,f\left(\begin{matrix}\ldots, \alpha_n+r+\varepsilon\\ \ldots, \beta_n+r+\varepsilon\end{matrix}\middle| x\right)-x^{r}\,f\left(\begin{matrix}\ldots, \alpha_n+r\\ \ldots, \beta_n+r\end{matrix}\middle| x\right)\right],$$

das beim Grenzübergang $\varepsilon\to 0$ den endlichen Wert annimmt: [vgl. auch (79)]

$$\textbf{(83)}\qquad \frac{d}{d\varepsilon}\left[x^{r+\varepsilon} f\left(\begin{matrix}\cdot\,\cdot, & \alpha_n+r+\varepsilon\\ \cdot\,\cdot, & \beta_n+r+\varepsilon\end{matrix}\middle| x\right)\right]_{\varepsilon=0} = \frac{d}{dr}\left[x^r f\left(\begin{matrix}\alpha_1+r, \cdot\,\cdot\, \alpha_n+r\\ \beta_1+r, \cdot\,\cdot\, \beta_n+r\end{matrix}\middle| x\right)\right]_{r=1-\beta_i}$$
$$= x^{1-\beta_i}\bar{\Phi}_{ni}(x) + x^{1-\beta_k}\Phi_{nk}(x)\ln x,$$

$$\textbf{(83a)}\qquad \text{wo}\quad \bar{\Phi}_{ni}(x) = \left[\frac{d}{dr} f\left(\begin{matrix}\alpha_1+r, \cdot\,\cdot\, \alpha_n+r\\ \beta_1+r, \cdot\,\cdot\, \beta_n+r\end{matrix}\middle| x\right)\right]_{r=1-\beta_i}.$$

Die g ersten Glieder in der Reihenentwicklung von $\bar{\Phi}_{ni}(x)$ lauten:

$\sum_{\lambda=0}^{g-1} \frac{\Pi\Gamma(\alpha_\rho+1-\beta_i+\lambda)}{\overline{\Pi}'\Gamma(\beta_\rho+1-\beta_i+\lambda)}(-1)^{g-\lambda-1}(g-\lambda-1)!\, x^\lambda$, wie sich unmittelbar durch Differentiation mit Beachtung der Relation: $\lim_{r\to -g} \frac{d}{dr}\frac{1}{\Gamma(r)} = (-1)^g\, g!$ ergibt.

Von den beiden Hauptintegralen (82a) und (82c) ist also das zum größeren Exponenten $1-\beta_k$ gehörige beizubehalten, das andere aber durch das zum Exponenten $1-\beta_i$ gehörige Integral (83) zu ersetzen; nach dieser Veränderung bilden die n zum Nullpunkt gehörigen Integrale wieder ein Fundamentalsystem.

Die vorliegende Begründung[1] eines aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen wohlbekannten Ergebnisses hat den Vorzug, daß sie unmittelbar die notwendigen Modifikationen der Übergangssubstitutionen erkennen läßt.

So soll die Übergangssubstitution S_{10} (58) untersucht werden, indem darin die Parameterwerte (82) eingesetzt werden; die beim Grenzübergang $\varepsilon\to 0$ unendlich werdenden beiden Glieder für $\nu=i$ und $\nu=k$ auf der rechten Seite sollen zum Zweck des Grenzüberganges vereinigt werden.

Nach (60) ist, wenn das Symbol Π nach wie vor das Produkt über den Index ρ von 1 bis n, das Symbol Π'' desgleichen mit Ausnahme der beiden Werte $\rho=i$ und $\rho=k$ bedeutet:

$$b_{ni} = \frac{1}{\sin\pi(g-\varepsilon)}\cdot\frac{\Pi\sin\pi(1-r-\varepsilon-\alpha_\rho)}{\Pi''\sin\pi(1-r-\varepsilon-\beta_\rho)} \qquad \text{und:}$$

$$b_{nk} = \frac{1}{\sin\pi(\varepsilon-g)}\cdot\frac{\Pi\sin\pi(1-r-g-\alpha_\rho)}{\Pi''\sin\pi(1-r-g-\beta_\rho)} = -\frac{1}{\sin\pi(g-\varepsilon)}\cdot\frac{\Pi\sin\pi(1-r-\alpha_\rho)}{\Pi''\sin\pi(1-r-\beta_\rho)}.$$

Nun existiert der Grenzwert:

$$\textbf{(84a)}\qquad \bar{b}_{nk} = \lim_{\varepsilon\to 0}(b_{ni}+b_{nk}) = \frac{(-1)^g}{\pi}\left[\frac{d}{du}\frac{\Pi\sin\pi(u-\alpha_\rho)}{\Pi''\sin\pi(u-\beta_\rho)}\right]_{u=\beta_i}.$$

Formt man also die Summe der genannten beiden Glieder folgenderweise um:

$$\textbf{(84b)}\qquad \begin{aligned} &b_{ni}x^{1-\beta_i}\Phi_{ni}(x) + b_{nk}(x)^{1-\beta_k}\Phi_{nk}(x)\\ &=[b_{ni}\sin\pi(\varepsilon-g)]\,\frac{x^{1-\beta_i}\Phi_{ni}(x) - x^{1-\beta_k}\Phi_{nk}(x)}{\sin\pi(\varepsilon-g)} + [b_{ni}+b_{nk}]\,x^{1-\beta_k}\Phi_{nk}(x),\end{aligned}$$

so erhält man beim Grenzübergang $\varepsilon\to 0$ den Ausdruck:

$$\textbf{(84)}\qquad \frac{(-1)^g}{\pi}\left[b_{ni}\sin\pi(\beta_k-\beta_i)\right]\left[x^{1-\beta_i}\bar{\Phi}_{ni}(x) + x^{1-\beta_k}\Phi_{nk}(x)\ln x\right] + \bar{b}_{nk}\,x^{1-\beta_k}\Phi_{nk}(x).$$

[1] Im Falle n=2 vgl. F. Klein, Vorlesung über die hypergeometrische Funktion 1893/94, p. 74 ff.

Daher bleibt die Übergangssubstitution S_{10} (58) auch für $\beta_i - \beta_k = g$ sinnvoll, wenn hiebei die Summe (84b) der beiden Glieder mit $\nu = i$ und $\nu = k$ durch den Ausdruck (84) ersetzt wird. Man beachte, daß der Koeffizient $b_{ni} \sin \pi(\beta_i - \beta_k)$ nach (60) endlich und von Null verschieden ist.

In ähnlicher Weise läßt sich in der Übergangssubstitution $S_{\infty 0}$ (62) die Summe der beiden Glieder:

(85b) $$\frac{b_{ni}}{\sin \pi(\beta_i - \alpha_\lambda)} (-x)^{1-\beta_i} \Phi_{ni}(x) + \frac{b_{nk}}{\sin \pi(\beta_k - \alpha_\lambda)} (-x)^{1-\beta_k} \Phi_{nk}(x)$$

folgenderweise umformen:

$$\frac{b_{ni} \sin \pi(\varepsilon - g)}{\sin \pi(\beta_i - \alpha_\lambda)} \left[\frac{(-x)^{1-\beta_i} \Phi_{ni}(x) - (-1)^g (-x)^{1-\beta_k} \Phi_{nk}(x)}{\sin \pi(\varepsilon - g)} \right]$$

$$+ \left[\frac{(-1)^g b_{ni}}{\sin \pi(\beta_i - \alpha_\lambda)} + \frac{b_{nk}}{\sin \pi(\beta_k - \alpha_\lambda)} \right] (-x)^{1-\beta_k} \Phi_{nk}(x).$$

Der in eckigen Klammern stehende Koeffizient von $(-x)^{1-\beta_k} \Phi_{nk}(x)$ hat nach dem Vorausgehenden den Wert:

$$\frac{(-1)^g}{\sin \pi(g - \varepsilon)} \left[\frac{\overline{\Pi}' \sin \pi(1 - r - \varepsilon - \alpha_\rho)}{\Pi'' \sin \pi(1 - r - \varepsilon - \beta_\rho)} - \frac{\overline{\Pi}' \sin \pi(1 - r - \alpha_\rho)}{\Pi'' \sin \pi(1 - r - \beta_\rho)} \right].$$

Durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ geht daher (85b) in den folgenden Ausdruck über [vgl. (79) und (83)]:

(85) $$\frac{(-1)^g}{\pi} \left[\frac{b_{ni} \sin \pi(\beta_k - \beta_i)}{\sin \pi(\beta_i - \alpha_\lambda)} \right] \left[(-x)^{1-\beta_i} \overline{\Phi}_{ni}(x) + (-1)^g (-x)^{1-\beta_k} \Phi_{nk}(x) \ln(-x) \right]$$

$$+ c_{n\lambda k} (-x)^{1-\beta_k} \Phi_{nk}(x), \quad \text{wo} \qquad \textbf{(85a)} \quad c_{n\lambda k} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{d}{du} \frac{\overline{\Pi}' \sin \pi(u - \alpha_\rho)}{\Pi'' \sin \pi(u - \beta_\rho)} \right] u = \beta_i.$$

Die Übergangssubstitution $S_{0\infty}$ (61) bleibt gültig, wobei jedoch die Gleichung für $\lambda = i$ mit jener für $\lambda = k$ identisch wird; $S_{0\infty}$ ist daher durch eine analoge Darstellung des Ersatzintegrales (83) zu ergänzen. Zu diesem Zweck muß zuvor die entsprechende Übergangssubstitution für die allgemeine Funktion $f_n(x)$ (ohne Spezialisierung eines Parameters β_ν) aufgestellt werden. Das geschieht in der Weise, daß man zunächst die Gleichung (61) mit $n+1$ anstelle von n und für $\lambda = n+1$ aufstellt und darnach $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1} = 1$ setzt [vgl. hiezu (36a)]. Dabei wird für $\nu \leqq n$ [vgl. (60)]:

$$a_{n+1,\,\nu} = a_{n\nu} \frac{\sin \pi(\beta_{n+1} - \alpha_\nu)}{\sin \pi(\alpha_{n+1} - \alpha_\nu)} = a_{n\nu}; \qquad \sin \pi(\beta_{n+1} - \alpha_\nu) = \sin \pi \alpha_\nu;$$

$$\text{ferner ist:} \quad \frac{a_{n+1,\,n+1}}{\sin \pi(\beta_{n+1} - \alpha_{n+1})} = \frac{\Pi \sin \pi(\beta_\rho - 1)}{\Pi \sin \pi(\alpha_\rho - 1)} = \prod_{\rho=1}^{n} \frac{\sin \pi \beta_\rho}{\sin \pi \alpha_\rho}.$$

Also folgt:

(86) $$f\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots \alpha_n \\ \beta_1, \ldots \beta_n\end{matrix} \middle| x\right) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_{n\nu}}{\sin \pi \alpha_\nu} (-x)^{-\alpha_\nu} \Psi_{n\nu}(x) - \prod_{\rho=1}^{n} \frac{\sin \pi \beta_\rho}{\sin \pi \alpha_\rho} \cdot \frac{1}{x} f\left(\begin{matrix}2-\beta_1, \ldots 2-\beta_n \\ 2-\alpha_1, \ldots 2-\alpha_n\end{matrix} \middle| \frac{1}{x}\right).$$

Ersetzt man nun die Parameter α_i, β_i bzw. durch α_i+r, β_i+r $(i=1, \ldots n)$, multipliziert die Gleichung mit $(-x)^r$, differenziert sodann nach r und setzt endlich $r=1-\beta_i$, so entsteht mit Rücksicht auf (83) die gewünschte Gleichung:

$$\textbf{(87)}\quad (-x)^{1-\beta_i}\overline{\Phi}_{ni}(x)+(-1)^g(-x)^{1-\beta_k}\Phi_{nk}(x)\ln(-x)=\pi\sum_{\nu=1}^{n}a_{n\nu}\frac{\cos\pi(\beta_i-\alpha_\nu)}{\sin^2\pi(\beta_i-\alpha_\nu)}(-x)^{-\alpha_\nu}\Psi_{n\nu}(x).$$

Denn $a_{n\nu}$ und $\Psi_{n\nu}(x)$ hängen nicht von r ab; dagegen enthält der Koeffizient:

$\prod_{\rho=1}^{n}\frac{\sin\pi(\beta_\rho+r)}{\sin\pi(\alpha_\rho+r)}$ den Faktor $\sin\pi(\beta_i+r)\sin\pi(\beta_k+r)$, so daß für $r=1-\beta_i$ sowohl er selbst wie seine Ableitung nach r verschwindet.

Es ist zu beachten, daß in den Integraldarstellungen (20) bis (27) für die Integralfunktionen $(n-1)^{ter}$ Ordnung die Ersatzintegrale als gleichberechtigt mit den anderen eintreten können. Aus der rekursiven Definition (19) ist zu ersehen, daß das Ergebnis das gleiche ist, ob man für $J_{n-1}(t)$ ein Ersatzintegral $(n-1)^{ter}$ Ordnung einsetzt, das als ein Grenzwert der Form: $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[J_{n-1}(t;\varepsilon)-\overline{J}_{n-1}(t)]$ gewonnen wurde, oder ob man dieses Ersatzintegral direkt aus $J_n(x)$ durch den entsprechenden Grenzübergang $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[J_n(x;\varepsilon)-\overline{J}_n(x)]$ ableitet. Insbesondere für die Integraldarstellungen (20) und (21) läßt sich dieser Satz auch in folgender Form aussprechen [vgl. (33)]:

$$\textbf{(88)}\quad \frac{d}{dr}\left[x^r f\left(\begin{matrix}\cdot\cdot\,\alpha_n+r\\ \cdot\cdot\,\beta_n+r\end{matrix}\middle| x\right)\right]=\frac{1}{\Gamma(\beta_n-\alpha_n)}\int_0^1 u^{\alpha_n-1}(1-u)^{\beta_n-\alpha_n-1}\frac{d}{dr}\left[(xu)^r f\left(\begin{matrix}\cdot\cdot\,\alpha_{n-1}+r\\ \cdot\cdot\,\beta_{n-1}+r\end{matrix}\middle| xu\right)\right]du.$$

Daher liefert für $\beta_i-\beta_k=g$ die Integraldarstellung (26) in jedem Fall linear unabhängige Integrale für $\Omega^I_{n\nu}(x)$ $(\nu=1, \ldots n-1)$. Der Fall $i=n$ kann durch eine Änderung in der Numerierung der Parameter auf den Fall $i<n$ zurückgeführt werden. Nun ist das Integral $\Omega^I_{ni}(x)$ im Fall $k<n$ mit $\Omega^I_{nk}(x)$ identisch; an seine Stelle tritt jenes Integral $\overline{\Omega}^I_{ni}(x)$, das durch (26) definiert ist, wenn im Integranden $\Phi_{n-1,i}(t)$ durch $\overline{\Phi}_{n-1,i}(t)+\Phi_{n-1,i}(t)\ln(-t)$ ersetzt wird; es kann bei Benutzung der Parameterwerte (81) auch durch den Grenzwert gebildet werden [wie man aus (26) oder auch aus (69) ersieht]:

$$\textbf{(89)}\quad \overline{\Omega}^I_{ni}(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\Omega^I_{ni}(x)-(-1)^g\Omega^I_{nk}(x)\right].$$

Für $k=n$ dagegen existiert nach (69) der Grenzwert:

$$\textbf{(89a)}\quad \overline{\Omega}^I_{ni}(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\Omega^I_{ni}(x).$$

Im letzteren Fall lautet die Übergangssubstitution S_{10} (69) wegen $\sin\pi(\beta_i-\beta_n)=\sin\pi(g-\varepsilon)$ folgendermaßen:

$$\textbf{(89b)}\quad \overline{\Omega}^I_{ni}(x)=(-1)^{g-1}\left[x^{1-\beta_i}\overline{\Phi}_{ni}(x)+x^{1-\beta_n}\Phi_{nn}(x)\ln x\right];$$

im ersteren kann sie durch den Grenzübergang (89) analog wie in den bisher behandelten Fällen leicht gefunden werden. Auch die übrigen Übergangssubstitutionen sind nach den gleichen Methoden zu modifizieren und bieten nichts prinzipiell Neues, weshalb auf die Durchführung der Einzelrechnungen verzichtet werden kann. Aus dem gleichen Grund kann der in § 11 unter IV. genannte Fall $\alpha_k - \alpha_i = g$ mit dem Hinweis auf seine dualen Beziehungen zu dem untersuchten Fall $\beta_i - \beta_k = g$ als erledigt gelten.

Dagegen soll der Bau der im Ersatzintegral auftretenden Reihe $\bar{\Phi}_{n\,i}(x)$ (83a) noch kurz untersucht werden. Bei Einhaltung der üblichen Normierung könnte sie durch eine Reihe mit rationalen Koeffizienten ersetzt werden:

$$\left[\frac{d}{dr} F\left(\begin{matrix}\alpha_1+r, \ldots \alpha_n+r \\ \beta_1+r, \ldots \beta_n+r\end{matrix}\middle| x\right)\right]_{r=1-\beta_i}.$$

Auf Grund der Differentiationsregel:

$$\left[\frac{d}{dr} \ln \prod_{\rho=1}^{n} \frac{[\alpha_\rho+r]_\lambda}{[\beta_\rho+r]_\lambda}\right]_{r=0} = \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \sum_{\rho=1}^{n} \left(\frac{1}{\alpha_\rho+\nu} - \frac{1}{\beta_\rho+\nu}\right)$$

ergibt sich das einfache Bildungsgesetz [vgl. (1)]:

$$\textbf{(90)} \qquad \frac{dF_n(x)}{dr} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} x^\lambda \prod_{\rho=1}^{n} \frac{[\alpha_\rho]_\lambda}{[\beta_\rho]_\lambda} \cdot \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \sum_{\rho=1}^{n} \left(\frac{1}{\alpha_\rho+\nu} - \frac{1}{\beta_\rho+\nu}\right),$$

wobei $\frac{dF_n(x)}{dr} = \left[\frac{d}{dr} F\left(\begin{matrix}\alpha_1+r, \ldots \alpha_n+r \\ \beta_1+r, \ldots \beta_n+r\end{matrix}\middle| x\right)\right]_{r=0}$ zu verstehen ist; im analogen Sinn soll die Abkürzung $\frac{df_n(x)}{dr}$ benützt werden.

Nach (37) ergibt sich die zu (90) analoge Reihe:

$$\textbf{(91)} \qquad \begin{aligned} \frac{df_n(x)}{dr} &= \frac{d \ln f_n(0)}{dr} f_n(x) + f_n(0) \frac{dF_n(x)}{dr} \\ &= \sum_{\rho=1}^{n} \left[\frac{\Gamma'(\alpha_\rho)}{\Gamma(\alpha_\rho)} - \frac{\Gamma'(\beta_\rho)}{\Gamma(\beta_\rho)}\right] \cdot f_n(x) + \sum_{\lambda=0}^{\infty} x^\lambda \prod_{\rho=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha_\rho+\lambda)}{\Gamma(\beta_\rho+\lambda)} \cdot \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \sum_{\rho=1}^{n} \left(\frac{1}{\alpha_\rho+\nu} - \frac{1}{\beta_\rho+\nu}\right). \end{aligned}$$

Trotz der größeren Einfachheit der Reihenentwicklung (90) gegenüber (91) ist doch dieser Vorzug der üblichen Normierung nur ein scheinbarer, da die bei der Bildung des Ersatzintegrales vermiedenen Ableitungen von Γ-Funktionen dafür in den Übergangssubstitutionen, nämlich bei der Bildung der Ausdrücke $\bar{b}_{nk}$ (84a) und $c_{n\lambda k}$ (85a) wieder zum Vorschein kommen.

Aus $$\frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\beta+r)} = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha+r-1}(1-t)^{\beta-\alpha-1}\,dt$$

ergibt sich für die in (91) auftretenden Ableitungen von Γ-Funktionen die folgende Integraldarstellung:

$$\textbf{(92)} \qquad \left[\frac{d}{dr} \ln \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\beta+r)}\right]_{r=0} = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)\,\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-\alpha-1} \ln t\,dt.$$

Hieraus folgt eine weitere interessante Darstellung mittels hypergeometrischer Funktionen zweiter Ordnung, nämlich:

(92a) $$\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}-\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha}F\left(\begin{matrix}\alpha-\beta+1, & 1\\ \alpha+1 & , 2\end{matrix}\middle| 1\right)=\frac{\alpha-\beta}{\beta}F\left(\begin{matrix}\beta-\alpha+1, & 1\\ \beta+1 & , 2\end{matrix}\middle| 1\right)$$

[bzw. unter den Voraussetzungen: $\Re(\beta)>0$; $\Re(\alpha)>0$].

Zum Beweis benutzt man die rekursive Definition (38):

$$\frac{\alpha-\beta}{\beta}F\left(\begin{matrix}\beta-\alpha+1, & 1\\ \beta+1 & , 2\end{matrix}\middle| 1\right)=\frac{\alpha-\beta}{\beta}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)\,\Gamma(\alpha)}\int_0^1 u^{\beta-\alpha}(1-u)^{\alpha-1}F\left(\begin{matrix}1\\ 2\end{matrix}\middle| u\right)du,$$

wobei nach (38) und (38a):

$$F\left(\begin{matrix}1\\ 2\end{matrix}\middle| x\right)=\int_0^1\frac{du}{1-xu}=-\frac{1}{x}\ln(1-x),$$ also:

$$\frac{\alpha-\beta}{\beta}F\left(\begin{matrix}\beta-\alpha+1, & 1\\ \beta+1 & , 2\end{matrix}\middle| 1\right)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)\,\Gamma(\alpha)}\int_0^1 u^{\beta-\alpha-1}(1-u)^{\alpha-1}\ln(1-u)\,du.$$

Diese Darstellung ist aber für $u=1-t$ mit (92) identisch. Die zweite in (92a) angegebene hypergeometrische Funktion ergibt sich aus der letztgenannten durch Vertauschung der Parameter α und β mit gleichzeitigem Vorzeichenwechsel.

Weisen drei Exponenten $1-\beta_i\leqq 1-\beta_k\leqq 1-\beta_l$ untereinander ganzzahlige Unterschiede auf, so hat man noch ein Ersatzintegral der Form: $\frac{d^2}{dr^2}\left[x^r f\left(\begin{matrix}\cdot\cdot & \alpha_n+r\\ \cdot\cdot & \beta_n+r\end{matrix}\middle| x\right)\right]_{r=1-\beta_i}$ zu bilden, dessen Reihenentwicklung also noch ein Glied mit $\ln^2 x$ besitzt. Die zugehörigen Übergangssubstitutionen findet man nach der gleichen Methode aus den bisher aufgestellten mit Benutzung der beiden zu den Exponenten $1-\beta_i$ und $1-\beta_k$ gehörigen Ersatzintegrale, indem man $1-\beta_l=1-\beta_k+h-\varepsilon$; $1-\beta_k=1-\beta_i+g-\varepsilon$ (g,h ganzzahlig und $\geqq 0$) setzt und das neue Ersatzintegral durch den Grenzwert bildet:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\left(x^{1-\beta_i}\,\overline{\Phi}_{ni}(x)+x^{1-\beta_k}\,\Phi_{nk}(x)\ln x\right)-\left(x^{1-\beta_k}\,\overline{\Phi}_{nk}(x)+x^{1-\beta_l}\,\Phi_{nl}(x)\ln x\right)\right].$$

Endlich soll noch der im vorigen Paragraphen genannte Fall V. $\sigma_n-1=\pm g$ besprochen werden. Bei dem komplizierten Bau der Reihenentwicklungen der am Einheitspunkt regulären Integrale wird man sich in diesem Fall mit einer analytischen Definition des Ersatzintegrales begnügen und auf die Berechnung der Koeffizienten seiner Reihenentwicklung verzichten müssen.[1]

Das Ersatzintegral hat die Form:

(93) $$\overline{\Omega}_{nn}(x)+(x-1)^{\sigma_n-1}\,\Omega_{nn}(x)\ln(x-1),$$

wobei $\overline{\Omega}_{nn}(x)$ im Fall $\sigma_n-1=+g$ durch eine Potenzreihe in $x-1$, im Fall $\sigma_n-1=-g$ durch eine Laurent-Reihe mit dem niedrigsten Exponenten $-g$ dargestellt wird. Man erkennt dies, indem man sich die zu 1 gehörigen Integrale in Reihenentwicklungen der Form $(x-1)^r\mathfrak{P}(r;x-1)$ dargestellt denkt, wo die Koeffizienten der nach Potenzen von $x-1$ fortschreitenden Potenzreihe $\mathfrak{P}(r;x-1)$ noch von dem unbestimmt gelassenen Exponenten r abhängen sollen. Man kann also den ersten Reihenkoeffizienten so wählen, daß $\mathfrak{P}(\sigma_n-1;x-1)$

[1] Im Spezialfall $n=2$ wird diese Lücke im folgenden Paragraphen in (106), (106a), (106b) ausgefüllt.

$=\Omega_{nn}(x)$ ist; außerdem kann man einen ganzzahligen Wert $r_0 \geqq 0$ und solche Werte der $n-1$ willkürlich bleibenden Reihenkoeffizienten bestimmen, daß $\mathfrak{P}(r_0; x-1)$ gleich der rechten Seite von (80) oder (81) wird. Das Ersatzintegral hat nun in jedem Fall die Form:

$$\frac{d}{dr}\left[(x-1)^r \mathfrak{P}(r;x-1)\right] = (x-1)^r \frac{d}{dr}\mathfrak{P}(r;x-1) + (x-1)^r \mathfrak{P}(r;x-1)\ln(x-1),$$

wo für r der Wert $\sigma_n - 1$ oder r_0 einzusetzen ist, je nachdem $\sigma_n - 1 = -g$ oder $= +g$ ist. Damit ist [bei Beachtung der Gleichungen (80), (81)] die Form (93) bestätigt.

Setzt man in den Gleichungen (80) und (81) $r = \sigma_n - 1 = \pm g + \varepsilon$ und geht zur Grenze $\varepsilon \to 0$ über, so erhält man folgende zwei Ausdrücke für das Ersatzintegral:

(93a)
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[(1-x)^{\sigma_n - 1}\,\Omega_{nn}(x) - \frac{1}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{n-1} b_{n\nu} \sin\pi(\beta_\nu - \beta_n)\,\Omega^{I}_{n\nu}(x)\right]$$
$$= \overline{\Omega}^{I}_{nn}(x) + (1-x)^{\sigma_n - 1}\,\Omega_{nn}(x)\ln(1-x);$$

(93b)
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[(x-1)^{\sigma_n - 1}\,\Omega_{nn}(x) - \frac{1}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{n-1} a_{n\nu} \sin\pi(\alpha_n - \alpha_\nu)\,\Omega^{II}_{n\nu}(x)\right]$$
$$= \overline{\Omega}^{II}_{nn}(x) + (x-1)^{\sigma_n - 1}\,\Omega_{nn}(x)\ln(x-1).$$

Die Übergangssubstitutionen S_{01} (72) und $S_{\infty 1}$ (73) können also mit Hilfe dieser Grenzwerte für $\lambda < n$ durch die folgenden ersetzt werden:

(94) $$x^{1-\beta_\lambda}\,\Phi_{n\lambda}(x) = \frac{\sin\pi(\beta_\lambda - \beta_n)}{\pi}\,\Omega^{I}_{n\lambda}(x) + (-1)^{\sigma_n}\left[\overline{\Omega}^{I}_{nn}(x) + (1-x)^{\sigma_n - 1}\Omega_{nn}(x)\ln(1-x)\right];$$

(95) $$x^{-\alpha_\lambda}\,\Psi_{n\lambda}(x) = \frac{\sin\pi(\alpha_n - \alpha_\lambda)}{\pi}\,\Omega^{II}_{n\lambda}(x) + (-1)^{\sigma_n}\left[\overline{\Omega}^{II}_{nn}(x) + (x-1)^{\sigma_n - 1}\Omega_{nn}(x)\ln(x-1)\right].$$

Für $\lambda = n$ aber erhält man statt dessen die beiden Gleichungen:

(96) $$\overline{\Omega}^{I}_{nn}(x) + (1-x)^{\sigma_n - 1}\,\Omega_{nn}(x)\ln(1-x) = (-1)^{\sigma_n} x^{1-\beta_n}\,\Phi_{nn}(x);$$

(97) $$\overline{\Omega}^{II}_{nn}(x) + (x-1)^{\sigma_n - 1}\,\Omega_{nn}(x)\ln(x-1) = (-1)^{\sigma_n} x^{-\alpha_n}\,\Psi_{nn}(x);$$

sie liefern die versprochene analytische Definition der beiden Formen des Ersatzintegrales, d. h. der beiden Funktionen $\overline{\Omega}^{I}_{nn}(x)$ und $\overline{\Omega}^{II}_{nn}(x)$.

Alle übrigen Übergangssubstitutionen bleiben unverändert gültig. Doch drücken S_{10} (69) zusammen mit (58) bzw. $S_{1\infty}$ (70) zusammen mit (59) nur $n-1$ linear unabhängige, zu 1 gehörige Integrale durch das zu 0 bzw. ∞ gehörige Fundamentalsystem aus und sind durch die Gleichung (96) bzw. (97) zu ergänzen.

§ 13. Die Gauß'sche hypergeometrische Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Für die hypergeometrische Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ist der Spezialfall $n = 2$ durch zwei wichtige Eigenschaften vor dem allgemeinen Fall ausgezeichnet.

Die erste wurde bereits in § 6, Gleichung (40) ausgesprochen, nämlich:

(98) $$F\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\1,\gamma\end{matrix}\middle| x\right) = G\left\{\begin{matrix}\alpha & & \\ \gamma & & \\ \beta & & \end{matrix}\middle| x\right\}.$$

Demzufolge kann die Gleichung (43) für $n=2$ und mit Rücksicht auf ihre Symmetrieeigenschaften folgenderweise geschrieben werden:

$$\textbf{(99)} \qquad F\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\1,\gamma\end{matrix}\middle|x\right)=(1-x)^{-\beta}F\left(\begin{matrix}\beta,\gamma-\alpha\\1,\ \gamma\end{matrix}\middle|\frac{x}{x-1}\right)=(1-x)^{-\alpha}F\left(\begin{matrix}\alpha,\gamma-\beta\\1,\ \gamma\end{matrix}\middle|\frac{x}{x-1}\right).$$

Die Gleichheit des zweiten und dritten Gliedes dieser Doppelgleichung läßt sich in folgender Form darstellen, wo α durch $\gamma-\alpha$ und $\frac{x}{x-1}$ durch x, also $1-x$ durch $\frac{1}{1-x}$ ersetzt sei:

$$\textbf{(100)} \qquad F\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\1,\gamma\end{matrix}\middle|x\right)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(\begin{matrix}\gamma-\alpha,\gamma-\beta\\1\ ,\ \gamma\end{matrix}\middle|x\right).$$

Entsprechend lautet die Gleichung (48) für $n=2$ und mit Rücksicht auf ihre Symmetrieeigenschaften:

$$\textbf{(101)} \quad \Gamma(\sigma_2)\,\Omega_{22}(x)=x^{1-\beta_2}F\left(\begin{matrix}\beta_1-\alpha_1,\beta_1-\alpha_2\\1\ ,\ \sigma_2\end{matrix}\middle|1-x\right)=x^{1-\beta_1}F\left(\begin{matrix}\beta_2-\alpha_1,\beta_2-\alpha_2\\1\ ,\ \sigma_2\end{matrix}\middle|1-x\right).$$

Die Gleichheit des zweiten und dritten Gliedes läßt sich wiederum in der Form (100) aussprechen; diese für die Theorie der Gauß'schen Differentialgleichung so bedeutsame Relation findet also ihre Verallgemeinerung für $n>2$ in den entsprechenden Eigenschaften zweier spezieller G-Reihen, während die hypergeometrische Reihe n^{ter} Ordnung keine analoge Eigenschaft zu besitzen scheint.

Die zweite ausgezeichnete Eigenschaft des Spezialfalles $n=2$ wurde in den Überlegungen des § 8 durch die Einschränkung $n>2$ angedeutet.

In der Tat lautet die Integraldarstellung (26) für $\Omega^{I}_{21}(x)$ nach Ausführung der Transformation $t=\frac{xu}{u-1}$ [also $x-t=\frac{x}{1-u}$] und mit Berücksichtigung des in (28) angegebenen Wertes für $\Phi_{11}(t)$:

$$\Omega^{I}_{21}(x)=\Gamma(\alpha_1+1-\beta_1)\Gamma(\alpha_2+1-\beta_2)\,x^{1-\beta_1}\int_0^1 u^{\alpha_2-\beta_1}(1-u)^{\beta_1-\beta_2-1}\left(1-\frac{xu}{u-1}\right)^{\beta_1-\alpha_1-1}du.$$

Hieraus findet man für den Funktionswert an der Stelle $x=1$ den geschlossenen Ausdruck:

$$\textbf{(102a)} \qquad \begin{aligned}\Omega^{I}_{21}(1)&=\Gamma(\alpha_1+1-\beta_1)\Gamma(\alpha_2+1-\beta_2)\int_0^1 u^{\alpha_2-\beta_1}(1-u)^{\alpha_1-\beta_2}\,du\\&=\frac{1}{\Gamma(2-\sigma_2)}\Gamma(\alpha_1+1-\beta_1)\Gamma(\alpha_1+1-\beta_2)\Gamma(\alpha_2+1-\beta_1)\Gamma(\alpha_2+1-\beta_2).\end{aligned}$$

Da dieser Wert bei Vertauschung von α_i mit $1-\beta_i$ ungeändert bleibt, folgt nach (IX) (S. 22): $\Omega^{I}_{21}(1)=\Omega^{II}_{21}(1)$.

Nach (56) ergibt sich also folgende Reihenentwicklung [mit Benutzung des Symboles $f_2(x)$ (34)]:

$$\textbf{(102)} \quad \Omega^{I}_{21}(x)=\Omega^{II}_{21}(x)=\Gamma(\alpha_1+1-\beta_1)\Gamma(\alpha_2+1-\beta_1)\,x^{1-\beta_2}\,f\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_2,\alpha_2+1-\beta_2\\1\ ,\ 2-\sigma_2\end{matrix}\middle|1-x\right).$$

[Die Gleichheit dieser beiden Integrale ergibt sich übrigens direkt aus der Substitution S_{11} (68).] Zufolge der Vertauschungsrelationen (IX) erhält man hieraus die zweite Form der Reihenentwicklung:

(103) $\Omega_{21}^{I}(x) = \Omega_{21}^{II}(x) = \Gamma(\alpha_1+1-\beta_1)\Gamma(\alpha_1+1-\beta_2)\,x^{-\alpha_2} f\left(\begin{matrix}\alpha_2+1-\beta_1, \alpha_2+1-\beta_2 \\ 1 \quad , \quad 2-\sigma_2\end{matrix}\middle| \frac{x-1}{x}\right)$.

[$\Omega_{21}(x)$ unterscheidet sich von diesen beiden identischen Integralen nur um einen konstanten Faktor, der sich unschwer aus einem Vergleich von (25) und (30) mit (26) und (28) berechnen läßt.]

Im Falle $n=2$ lassen sich also für jedes der 6 Hauptintegrale beide Arten der Reihenentwicklung (sc. nach Potenzen von x und $\frac{x}{x-1}$; $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{1-x}$; $1-x$ und $\frac{x-1}{x}$) mittels der hypergeometrischen Reihe darstellen. Da diese selbst nach (100) in zwei verschiedenen Formen geschrieben werden kann, ergeben sich so die bekannten 24 Kummerschen Integrale — mit gewissen Faktoren versehen, die sich aus Γ-Funktionen von Linearformen der Parameter aufbauen.

Daher läßt sich in diesem Spezialfall auch unschwer die notwendige und hinreichende Bedingung für die lineare Unabhängigkeit der zu 1 gehörigen Hauptintegrale angeben [vgl. (XIV)]; für $\sigma_n - 1 = -g$ folgt sie übrigens unmittelbar aus dem in § 11 unter VI. Gesagten.

Die Übergangssubstitutionen werden auf die bekannten Formen gebracht, indem die bei den hypergeometrischen Funktionen auftretenden Faktoren mit den Koeffizienten der Übergangssubstitution vereinigt werden. Als Beispiel sei die Substitution $S_{10}(69)$ herausgegriffen [vgl. (50), (102)]:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\sigma_2)} \prod_{\rho=1}^{2} \Gamma(\alpha_\rho+1-\beta_1)\Gamma(\alpha_\rho+1-\beta_2)\cdot x^{1-\beta_2} F\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_2, \alpha_2+1-\beta_2 \\ 1 \quad , \quad 2-\sigma_2\end{matrix}\middle| 1-x\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sin\pi(\beta_1-\beta_2)}\left[\prod_{\rho=1}^{2}\frac{\Gamma(\alpha_\rho+1-\beta_1)}{\Gamma(\beta_\rho+1-\beta_1)}\cdot x^{1-\beta_1}\frac{\Phi_{21}(x)}{\Phi_{21}(0)} - \prod_{\rho=1}^{2}\frac{\Gamma(\alpha_\rho+1-\beta_2)}{\Gamma(\beta_\rho+1-\beta_2)}\cdot x^{1-\beta_2}\frac{\Phi_{22}(x)}{\Phi_{22}(0)}\right].$$

Mit Rücksicht auf (44) ergibt sich die gewünschte Darstellung:

$$x^{1-\beta_2}F\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_2, \alpha_2+1-\beta_2 \\ 1 \quad , \quad 2-\sigma_2\end{matrix}\middle| 1-x\right) = x^{1-\beta_1}F\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_1, \alpha_2+1-\beta_1 \\ 1 \quad , \quad 2-\sigma_2\end{matrix}\middle| 1-x\right)$$

$$= \frac{\Gamma(2-\sigma_2)\Gamma(\beta_1-\beta_2)}{\Gamma(\alpha_1+1-\beta_2)\Gamma(\alpha_2+1-\beta_2)} x^{1-\beta_1} F\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_1, \alpha_2+1-\beta_1 \\ 1 \quad , \beta_2+1-\beta_1\end{matrix}\middle| x\right)$$

$$+ \frac{\Gamma(2-\sigma_2)\Gamma(\beta_2-\beta_1)}{\Gamma(\alpha_1+1-\beta_1)\Gamma(\alpha_2+1-\beta_2)} x^{1-\beta_2} F\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_2, \alpha_2+1-\beta_2 \\ \beta_1+1-\beta_2, \quad 1\end{matrix}\middle| x\right).$$

Durch die Substitution $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\beta$, $\beta_1=1, \beta_2=\gamma$ erhält man die übliche (etwas kürzere, aber unsymmetrische) Form.

In diesem Zusammenhang sei daran erinnert, daß in der Übergangssubstitution $S_{01}(72)$ für $\lambda=1$ nach (64) die Vereinfachung möglich ist: $1-\frac{b_{21}}{\sin\pi\sigma_2}=\frac{b_{22}}{\sin\pi\sigma_2}$. Mit Benutzung der in (60) angegebenen Werte für b_{21}, b_{22} lautet also der Koeffizient von $\Omega_{21}^{I}(x)$ in den beiden Gleichungen (72) bzw. für $\lambda=1$: $-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\pi(\beta_2-\alpha_1)\sin\pi(\beta_2-\alpha_2)}{\sin\pi\sigma_2}$;

$\lambda=2$: $-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\pi(\beta_1-\alpha_1)\sin\pi(\beta_1-\alpha_2)}{\sin\pi\sigma_2}$. Das Analoge gilt für $S_{\infty 1}(73)$.

Eine ähnliche Vereinfachung gestattet die genannte Beziehung (64) in der Berechnung des Ausdruckes $\overline{b}_{2k}$(84a) ($i=1$, $k=2$ oder $i=2$, $k=1$); denn es ergibt sich unmittelbar: $\overline{b}_{2k}=\sin\pi\sigma_2$.

Die im Fall $\sigma_2-1=\pm g$ ($g\geqq 0$) gültigen Gleichungen (80) und (81) nehmen für $n=2$ die Form an [vgl. (60)]:

(104) $$(1-x)^{\sigma_2-1}\Omega_{22}(x)=\frac{1}{\pi^2}\sin\pi(\beta_1-\alpha_1)\sin\pi(\beta_1-\alpha_2)\,\Omega^{I}_{21}(x);$$

(105) $$(x-1)^{\sigma_2-1}\Omega_{22}(x)=\frac{1}{\pi^2}\sin\pi(\beta_1-\alpha_1)\sin\pi(\beta_2-\alpha_1)\,\Omega^{II}_{21}(x).$$

Zur Berechnung der Ersatzintegrale (93a) und (93b) bildet man die Differenz der beiden Gleichungsseiten in den letztgenannten Gleichungen; nach (101) und (102) lauten sie bzw.:

(104a) $$\frac{x^{1-\beta_2}}{\Gamma(\beta_1-\alpha_1)\,\Gamma(\beta_1-\alpha_2)}\left[(1-x)^{\sigma_2-1}\,f\left(\begin{matrix}\beta_1-\alpha_1,\beta_1-\alpha_2\\ 1\quad,\quad\sigma_2\end{matrix}\middle|1-x\right)-f\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_2,\alpha_2+1-\beta_2\\ 1\quad,\quad 2-\sigma_2\end{matrix}\middle|1-x\right)\right];$$

(105a) $$\frac{x^{1-\beta_2}}{\Gamma(\beta_1-\alpha_1)\,\Gamma(\beta_1-\alpha_2)}\left[(x-1)^{\sigma_2-1}\,f\left(\begin{matrix}\beta_1-\alpha_1,\beta_1-\alpha_2\\ 1\quad,\quad\sigma_2\end{matrix}\middle|1-x\right)-\frac{\sin\pi(\beta_2-\alpha_1)}{\sin\pi(\beta_1-\alpha_2)}\,f\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_2,\alpha_2+1-\beta_2\\ 1\quad,\quad 2-\sigma_2\end{matrix}\middle|1-x\right)\right].$$

Nun setzt man: $\sigma_2-1=\pm g+\varepsilon$; also:

$$\alpha_1+1-\beta_2=\beta_1-\alpha_2\mp g-\varepsilon;\quad \alpha_2+1-\beta_2=\beta_1-\alpha_1\mp g-\varepsilon;$$

die vier Grenzübergänge $\lim\varepsilon=0$ in diesen beiden Ausdrücken und für jeden der beiden Fälle $\sigma_2-1=+g$ und $\sigma_2-1=-g$ werden nach der gleichen Methode wie bei der Bildung des Ersatzintegrales (83) vorgenommen. Da die Durchführung der Einzelrechnungen keine Schwierigkeiten bietet, aber einigen Platz beansprucht, möge hier die Angabe der wichtigsten Zwischenschritte genügen.

Mit Beachtung der aus (78) folgenden Identität [vgl. (79)] erhält man aus (104a) folgende Umformungen:

(104b) $$[\sigma_2-1=+g]:\quad\frac{x^{1-\beta_2}}{\Gamma(\beta_1-\alpha_1)\,\Gamma(\beta_1-\alpha_2)}\left[(1-x)^{\varepsilon}\,f\left(\begin{matrix}\beta_1-\alpha_1-g,\beta_1-\alpha_2-g\\ 1-g\quad,\quad 1+\varepsilon\end{matrix}\middle|1-x\right)-f\left(\begin{matrix}\beta_1-\alpha_2-g-\varepsilon,\beta_1-\alpha_1-g-\varepsilon\\ 1\quad,\quad 1-g-\varepsilon\end{matrix}\middle|1-x\right)\right];$$

(104c) $$[\sigma_2-1=-g]:\quad\frac{x^{1-\beta_2}(1-x)^{-g}}{\Gamma(\beta_1-\alpha_1)\,\Gamma(\beta_1-\alpha_2)}\left[(1-x)^{\varepsilon}\,f\left(\begin{matrix}\beta_1-\alpha_1,\beta_1-\alpha_2\\ 1\quad,1-g+\varepsilon\end{matrix}\middle|1-x\right)-f\left(\begin{matrix}\beta_2-\alpha_2-\varepsilon,\beta_1-\alpha_1-\varepsilon\\ 1-g\quad,\quad 1-\varepsilon\end{matrix}\middle|1-x\right)\right].$$

Dividiert man nun diese Differenzen durch ε und geht zur Grenze $\lim\varepsilon=0$ über (wobei in den eckigen Klammern $\pm g$ durch $\pm g+\varepsilon$ ersetzt werden darf), so erhält man das Ersatzintegral (94) und damit das folgende Bildungsgesetz für die Reihenentwicklung der Funktion $\overline{\Omega}^{I}_{22}(x)$:

$[\sigma_2-1=+g]$:

(106a)
$$\bar{\Omega}^{I}_{22}(x)=\frac{x^{1-\beta_2}}{\Gamma(\beta_1-\alpha_1)\Gamma(\beta_1-\alpha_2)}\left[\frac{d}{d\varepsilon}f\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_2+\varepsilon,\alpha_2+1-\beta_2+\varepsilon\\ 1+\varepsilon\quad,\quad 2-\sigma_2+\varepsilon\end{matrix}\middle|1-x\right)\right]_{\varepsilon=0};$$

$[\sigma_2-1=-g]$:

(106b)
$$\bar{\Omega}^{I}_{22}(x)=\frac{x^{1-\beta_2}(1-x)^{\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta_1-\alpha_1)\Gamma(\beta_1-\alpha_2)}\left[\frac{d}{d\varepsilon}f\left(\begin{matrix}\beta_1-\alpha_1+\varepsilon,\beta_1-\alpha_2+\varepsilon\\ 1+\varepsilon\quad,\quad \sigma_2+\varepsilon\end{matrix}\middle|1-x\right)\right]_{\varepsilon=0}.$$

Das gleiche Verfahren formt (105a) in den beiden Fällen $\sigma_2-1=\pm g$ bzw. in zwei Ausdrücke (105b) und (105c) um, die sich bzw. aus (104b) und (104c) dadurch ergeben, daß man in der eckigen Klammer zum Minuenden den Faktor $(-1)^g$, zum Subtrahenden den Faktor $\dfrac{\sin\pi(\beta_2-\alpha_1)}{\sin\pi(\beta_1-\alpha_2)}=(-1)^g\dfrac{\sin\pi(\beta_1-\alpha_2-\varepsilon)}{\sin\pi(\beta_1-\alpha_2)}$ fügt. Letzterer gibt beim Grenzübergang Veranlassung zum Auftreten eines weiteren Summanden, nämlich:

$$\frac{x^{1-\beta_2}(1-x)^{\sigma_2-1}}{\Gamma(\beta_1-\alpha_1)\Gamma(\beta_1-\alpha_2)}(-1)^g\pi\operatorname{ctg}\pi(\beta_1-\alpha_2)\,f\left(\begin{matrix}\beta_1-\alpha_1,\beta_1-\alpha_2\\ 1\quad,\quad \sigma_2\end{matrix}\middle|1-x\right).$$

So ergibt sich in den beiden Fällen $\sigma_2-1=\pm g$ für $\bar{\Omega}^{II}_{22}(x)$ die Darstellung:

(106)
$$\bar{\Omega}^{II}_{22}(x)=(-1)^{\sigma_2-1}\bar{\Omega}^{I}_{22}(x)+\pi\operatorname{ctg}\pi(\beta_1-\alpha_2)\cdot(x-1)^{\sigma_2-1}\Omega_{22}(x).$$

Diese Relation verdient deshalb einiges Interesse, weil sie ein Beispiel für den Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen $\bar{\Omega}^{I}_{nn}(x)$ und $\bar{\Omega}^{II}_{nn}(x)$ liefert, der für allgemeines n nicht so leicht zu erkennen ist.

Literaturverzeichnis.

(Es sind hier in chronologischer Anordnung nur jene Arbeiten genannt, die einen wesentlichen Beitrag zur Theorie der hyperg. Diff. gl. n^{ter} Ordnung mit 2 endl. sing. Punkten liefern. Weitere Literaturangaben finden sich in den Fußnoten des Textes.)

1. *1828, Clausen,* „Über die Fälle, in denen die Reihe $y = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ein Quadrat von der Form $z = 1 + \frac{\alpha'\beta'\delta'}{1.\gamma'\varepsilon'} x + \ldots$ hat".— Journ. f. Math. 3.

2. *1870, Thomä,* „Über die höheren hypergeometrischen Reihen, insbesondere über die Reihe: $1 + \frac{a_0 a_1 a_2}{1 b_1 b_2} x + \frac{a_0(a_0+1) a_1(a_1+1) a_2(a_2+1)}{1.2.b_1(b_1+1) b_2(b_2+1)} x^2 + \ldots$" Math. Ann. 2 (p. 427).

3. *1879, Thomä,* „Über Funktionen, welche durch Reihen in der Form dargestellt werden: $1 + \frac{p p' p''}{1.q'q''} + \frac{p(p+1) p'(p'+1) p''(p''+1)}{1.2 q'(q'+1) q''(q''+1)} + \ldots$" Journ. f. Math. 87 (p. 26).

4. *1883, Goursat,* „Mémoire sur les fonctions hypergéometriques d'ordre supérieur".— Ann. de l'éc. nor. (2) 12 (p. 261; p. 395).

5. *1888, Pochhammer,* „Über die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten".— Journ. f. Math. 102 (p. 76).

6. *1888, Schafheitlin,* „Über die Integraldarstellung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe". Journ. f. Math. 103 (p. 89).

7. *1897, Mellin,* „Über hypergeometrische Reihen höherer Ordnungen".— Acta Soc. Fennicä 23.

8. *1901, Rajewski,* „Über die hypergeometrischen Funktionen höherer Ordnung und deren Degenerationen". Anz. d. Akad. d. Wiss. in Krakau 1901 (p. 423). (Gekürzte Wiedergabe des gleichnamigen Aufsatzes in polnischer Sprache in Rozprawy matem. przyrod. Akad. III, 1A, 1901.)

Lebenslauf.

Ich, Ernst Winkler, wurde geboren am 11. Dezember 1904 zu Weißenbrunn (Bezirksamt Kronach, Ofr.) als Sohn des ev. Pfarrers Georg Winkler und seiner Ehefrau Sophie, geb. Ortloph. Ich besuchte 1911—14 die Volksschule in Weißenbrunn, wurde 1914—18 von meinem Vater privat unterrichtet, trat im September 1918 in die fünfte Klasse des humanistischen Gymnasiums zu Erlangen ein und besuchte 1920—23 das humanistische Gymnasium zu Günzburg, wo ich im März 1923 die Reifeprüfung bestand. 1923—27 studierte ich an der Universität in München Mathematik und Physik und besuchte die Vorlesungen und Übungen bei folgenden Herren Professoren: Caratheodory, Dingler, Hartogs, Perron, Tietze, Voß in Mathematik; Donle, Grätz, Sommerfeld, Wien in Physik; Becher, Pfänder in Philosophie. März 1927 und April 1928 bestand ich die beiden Abschnitte der Lehramtsprüfung in Mathematik und Physik; in der Zwischenzeit nahm ich am Pädagogisch-didaktischen Seminar am Theresiengymnasium dahier teil. Ab 21. November 1927 wurde ich als Hilfsassistent am Mathematischen Institut der Technischen Hochschule eingestellt, wo ich noch tätig bin.

Allen meinen Lehrern spreche ich an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aus, ganz besonders aber Herrn Geheimrat Perron, dessen Anregung ich das Thema vorliegender Arbeit verdanke und der mir bei der Ausarbeitung mit seinem Rat zur Seite stand.

München, November 1930.